

F 1914

L: 031996

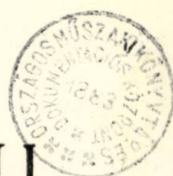
ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

SERIA
ȘTIINȚELE NATURII

MATEMATICĂ-MECANICĂ

ANUL XIII — nr. 1/1964

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI



SERIA ȘTIINȚELE NATURII

MATEMATICĂ — MECANICĂ

1

ANUL XIII — 1964

SERIA ȘTIINȚELE NATURII

COLEGIUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *M. Filipescu*.

Membri: Acad. prof. *H. Hulubei*; acad. prof. *M. Nicolescu*; prof. dr. *P. Spacu*,
membru corespondent al Academiei R.P.R.; prof. dr. *N. Bothariuc*.

Secretar: Conf. *Gh. Ciucu*, candidat în științe; conf. *D. Negoiu*, candidat
în științe.

MATEMATICĂ—MECANICĂ

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil: Acad. prof. *M. Nicolescu*.

Membri: Acad. prof. *C. Iacob*; acad. prof. *Gh. Mihoc*; acad. prof. *N. V. Teo-*
dorescu; acad. prof. *Gh. Vrânceanu*; prof. dr. *Gh. Galbură*; Conf.
C. Andreian, candidat în științe; conf. *Gh. Ciucu*, candidat în științe.

Secretar: conf. *P. P. Teodorescu*, candidat în științe.

REDACȚIA
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

B-dul 6 Martie nr. 64

Telefon 16.01.87/09

S U M A R

	<u>Pag.</u>
A. GHIKA : Operatori lineari în spații local convexe canonice	9
N. CRISTESCU : Condiții la limită în mișcarea firelor extensibile-II	21
V. OLARU : Ecuațiile cu derivate parțiale ale mediilor sferice și consecințe deduse din ele.	27
N. MIHĂILEANU : Despre forma lui Sannia	37
P. P. TEODORESCU : Asupra calculului optimei de spațiu elastic supusă acțiunii unor sarcini tangențiale	41
S. TURBATU : Aripa rectangulară semiinfinită în mișcarea transonică nestacionară	71
D. MANGERON : Probleme de teoria constructivă a funcțiilor relative la o nouă clasă de ecuații integro-diferențiale. I. aproximarea soluțiilor unor noi serii de probleme de contur prin polinoamele lui S. N. Bernstein	79
Șt. I. GHEORGHITĂ : Asupra mișcării apelor arteziene într-un strat neomogen de tipul unu	85
N. DINULESCU : Determinarea refracției astronomice pe baza unor măsurări recente ale densității atmosferice obținute cu ajutorul rachetelor și sateliților artificiali	93
I. D. TEODORESCU și N. I. NEDIȚĂ : Corespondențe între spații afine cu conexiune polinomială și transformările cremoniene întregi	101
T. HANGAN : Asupra coomologiei spațiilor cu curbura constantă	111
B. BEREANU : Soluții cu risc minim în programarea liniară	121
I. I. CRISTEA : Un tip de mișcări axial simetrice rotaționale pentru fluide incompresibile	141
ANATOLIE P. HRISTEV : Asupra covarianței conforme	167

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
А. ГИКА : Линейные операторы в местных выпуклых конических пространствах.	20
Н. КРИСТЕСКУ : Граничные условия для движения деформируемых нитей	26
В. ОЛАНУ : Уравнения с частными производными сферических средних значений и их последствия	35
Н. МИХЭЙЛЯНУ : О форме Саннии	39
П. П. ТЕОДОРЕСКУ : О задаче восьмой части упругого пространства находящейся под действием касательной нагрузки	69
С. ТУРБАТУ : Полубесконечное прямоугольное крыло в нестационарном околозвуком движении	77
Д. МАНДЖЕРОН : Вопрос конструктивной теории относительных функций при новом классе интегрально - дифференциальных уравнений. Аппроксимация решений нового ряда контурных задач при полиномах С. Н. Бернштейна	84
Ш. И. ГЕОРГИЦЭ : О движении артезианских вод в неоднородной пористой среде первого типа	91
Н. ДИНУЛЕСКУ : Определение астрономической рефракции на основании новейших измерений атмосферной плотности с помощью ракет и искусственных спутников	98
И. Д. ТЕОДОРЕСКУ и Н. НЕДИЦЭ : Соответствия между аффинными пространствами с полиномиальной связью и целые кремоновы преобразования	109
Т. ХАНГАН : О когомологии пространств с постоянной кривизной	120
Б. БЕРЯНУ : Решения с минимальным риском в линейном программировании	139
И. И. КРИСТЯ : Один тип осесимметричных бихревых движений для несжимаемой жидкости	165
АНАТОЛИЕ П. ХРИСТЕВ К конформной ковариантности	187

Содержание

187	ВВЕДЕНИЕ
187	1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ
187	2. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ
187	3. МЕТОДЫ ИСЛЕДОВАНИЯ
187	4. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
187	5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ
187	6. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
187	7. ПРИЛОЖЕНИЯ
187	8. СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ
187	9. РЕЗЮМЕ
187	10. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	11. ПОЯСНЕНИЕ
187	12. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	13. ПОЯСНЕНИЕ
187	14. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	15. ПОЯСНЕНИЕ
187	16. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	17. ПОЯСНЕНИЕ
187	18. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	19. ПОЯСНЕНИЕ
187	20. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	21. ПОЯСНЕНИЕ
187	22. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	23. ПОЯСНЕНИЕ
187	24. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	25. ПОЯСНЕНИЕ
187	26. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	27. ПОЯСНЕНИЕ
187	28. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	29. ПОЯСНЕНИЕ
187	30. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	31. ПОЯСНЕНИЕ
187	32. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	33. ПОЯСНЕНИЕ
187	34. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	35. ПОЯСНЕНИЕ
187	36. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	37. ПОЯСНЕНИЕ
187	38. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	39. ПОЯСНЕНИЕ
187	40. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	41. ПОЯСНЕНИЕ
187	42. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	43. ПОЯСНЕНИЕ
187	44. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	45. ПОЯСНЕНИЕ
187	46. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	47. ПОЯСНЕНИЕ
187	48. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	49. ПОЯСНЕНИЕ
187	50. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	51. ПОЯСНЕНИЕ
187	52. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	53. ПОЯСНЕНИЕ
187	54. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	55. ПОЯСНЕНИЕ
187	56. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	57. ПОЯСНЕНИЕ
187	58. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	59. ПОЯСНЕНИЕ
187	60. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	61. ПОЯСНЕНИЕ
187	62. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	63. ПОЯСНЕНИЕ
187	64. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	65. ПОЯСНЕНИЕ
187	66. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	67. ПОЯСНЕНИЕ
187	68. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	69. ПОЯСНЕНИЕ
187	70. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	71. ПОЯСНЕНИЕ
187	72. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	73. ПОЯСНЕНИЕ
187	74. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	75. ПОЯСНЕНИЕ
187	76. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	77. ПОЯСНЕНИЕ
187	78. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	79. ПОЯСНЕНИЕ
187	80. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	81. ПОЯСНЕНИЕ
187	82. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	83. ПОЯСНЕНИЕ
187	84. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	85. ПОЯСНЕНИЕ
187	86. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	87. ПОЯСНЕНИЕ
187	88. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	89. ПОЯСНЕНИЕ
187	90. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	91. ПОЯСНЕНИЕ
187	92. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	93. ПОЯСНЕНИЕ
187	94. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	95. ПОЯСНЕНИЕ
187	96. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	97. ПОЯСНЕНИЕ
187	98. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ
187	99. ПОЯСНЕНИЕ
187	100. ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

S O M M A I R E

	<u>Page.</u>
A. GHIKA : Des opérateurs linéaires dans les espaces localement convexes canoniques	20
N. CRISTESCU : Boundary conditions in the motion of extensible strings . .	26
V. OLARU : Les équations aux dérivées partielles des moyennes sphériques et ses conséquences	35
N. MIHĂILEANU : Sur la forme de Sannia	39
P. P. THEODORESCU : Sur le problème du demi-quart d'espace élastique soumis à l'action d'une charge tangentielle	69
S. TURBATU : Rectangular semi-infinite wing in transonic non-stationary flow	77
D. MANGERON : Des problèmes de la théorie constructive des fonctions relatives à une nouvelle classe d'équations intégrô-différentielles. L'approximation, par les polynômes de S. N. Bernstein, des solutions pour de nouvelles séries de problèmes de contour	84
Șt. I. GHEORGHITĂ : Sur le mouvement des eaux artésiennes dans un milieu non-homogène du premier type	91
N. DINULESCU : Détermination de la réfraction astronomique sur la base des mesures récentes de la densité atmosphérique obtenues à l'aide des fusées et satellites artificiels	98
I. D. TEODORESCU et N. I. NEDIȚĂ : Correspondances entre espaces affins à connexion polynômiale et les transformations crémoniennes entières	109
T. HANGAN : Sur la cohomologie des espaces à courbure constante	120
B. BEREANU : Minimum risk solutions in linear programming	139
I. I. CRISTEA : Un Type de mouvements axiaux symétriques rotatoires pour des fluides incompressibles	555
ANATOLIE P. HRISTEV : Sur la covariance conforme	777

OPERATORI LINEARI ÎN SPAȚII LOCAL CONVEXE CANONICE

AL. GHICA

Teoria operatorilor lineari în spații locale convexe este abia la începutul ei. Primele lucrări în acest domeniu datorită lui I. Ghelfand, G. Silov și C. Foiaș se referă în esență la anumite probleme puse de Mecanica Cuantică. În ultima vreme Helmut H. Shaefer [18] a introdus noțiunea de măsură spectrală cu valori într-o algebră local convexă și a studiat operatorii lineari care se pot reprezenta spectral cu ajutorul acestor măsuri.

Având în vedere marea importanță pe care o prezintă operatorii lineari din spațiile de distribuții atât în Teoria ecuațiilor lineare cu derivate parțiale dar în special în Teoria Cuantică a Cîmpurilor din Fizica modernă, am întreprins un studiu sistematic al spațiilor local convexe care se pot construi cu ajutorul spațiilor hilbertiene abstracte. Teoria operatorilor lineari în spațiile Hilbert fiind foarte adâncită, această cale m-a condus la reprezentarea spectrală a operatorilor continui autoadjuncți generalizați definiți pe astfel de spații. Familia spațiilor local convexe canonice de bază hilbertiană, pe care am construit-o numai cu ajutorul a patru operații topologice (dintre care două sînt esențial noi) conține drept cazuri particulare concrete toate spațiile de funcții ale lui L. Schwartz și I. Ghelfand precum și toate spațiile de distribuții. În afara acestor spații particulare deosebit de importante, există o infinitate de alte spații abstracte interesante aparținînd acestei familii. Astfel înlocuind operatorul $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ și puterile sale succesive printr-un șir $A_0, A_0A_1, A_0A_1A_2, \dots$ de operatori închiși definiți dens într-un spațiu hilbertian se obține încă un spațiu de aceeași natură.

Metoda pe care am utilizat-o constituie în același timp o clasificare a spațiilor canonice analogă întrucîtva clasificării funcțiilor lui Baire. Această clasificare permite totodată determinarea proprietăților generale ale spațiilor din fiecare clasă; cele patru operații topologice utilizate pentru construcție, conservînd o serie de proprietăți cum sînt completitudinea, reflexivitatea și altele. Fiecare clasă de spații posedă proprietăți noi față de spațiile din clasele precedente, care însă se transmit spațiilor din clasele următoare.

Există încă numeroase probleme importante deschise în teoria operatorilor lineari continui definiți în spații local convexe canonice. Cu toate acestea calea naturală pe care am ales-o pare deosebit de fecundă, iar rezultatele pe care le-am obținut pînă în prezent constituie fundamentele unei teorii a operatorilor lineari în spațiile local convexe canonice de bază hilbertiană.

1. Dualitate stîngă și dualitate dreaptă

Fie $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un cuplu de spații vectoriale, peste același corp Φ al numerelor reale sau complexe, în dualitate [2] în raport cu o formă bilineară $\langle x, y \rangle$, definită pe $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$, $\sigma(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ topologia slabă asupra lui $\mathcal{F}$, definită de această dualitate, $\tau(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ topologia lui Mackey [2] asupra lui $\mathcal{F}$ și $\beta(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ topologia tare [2] asupra lui $\mathcal{F}$ considerat drept dual al lui $\mathcal{G}$ înzestrat cu topologia slabă $\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{F})$.

Teorema 1. *În orice cuplu $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de spații vectoriale în dualitate cel puțin unul din spațiile $\mathcal{F}$ sau $\mathcal{G}$ este algebric izomorf cu un subspațiu vectorial slab peste tot dens al celuilalt. Dacă $\mathcal{F}$ este un spațiu reflexiv (în sensul lui Arens și Mackey) și $\mathcal{G}$ dualul său tare, proprietatea este adevărată pentru topologia inițială a lui $\mathcal{F}$ și topologia tare a lui $\mathcal{G}$.*

Demonstrația se bazează pe faptul că mulțimea tuturor cuplurilor $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ de subspații vectoriale $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{G}$ algebric izomorfe, în dualitate în raport cu restricția formei biliniare $\langle x, y \rangle$ la produsul $\mathcal{L} \times \mathcal{M}$, ordonată prin relația $(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \leq (\mathcal{L}', \mathcal{M}')$ echivalentă cu $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ și $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ este inductivă și pe teorema lui Zorn.

Această teoremă justifică următoarea

Definiția 1. *Se spune că un cuplu $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ este în dualitate dreaptă, respectiv stîngă, dacă $\mathcal{F}$ este algebric izomorf cu un subspațiu vectorial slab peste tot dens $\mathcal{F}_1$ al lui $\mathcal{G}$, respectiv dacă $\mathcal{G}$ este algebric izomorf cu un subspațiu vectorial slab peste tot dens $\mathcal{G}_1$ al lui $\mathcal{F}$.*

În cazul dualității drepte se poate identifica $\mathcal{F}$ cu $\mathcal{F}_1$ și presupune că $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ și $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{G}$, iar în cazul dualității stîngi se poate presupune că $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ și $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{F}$, pentru topologiile slabe.

2. Operatori autoadjuncți, normali și unitari generalizați

Fie $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ un cuplu de spații vectoriale în dualitate dreaptă în raport cu o formă biliniară $\langle x, y \rangle$, astfel ca $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ și $\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{G}$, A o aplicație lineară a unui subspațiu vectorial slab peste tot dens $\mathcal{D}_A \subseteq \mathcal{F}$ în $\mathcal{F}$ și B o aplicație lineară a unui subspațiu vectorial slab peste tot dens $\mathcal{D}_B \subseteq \mathcal{G}$ în $\mathcal{G}$, iar A^* aplicația lineară adjunctă a subspațiului vectorial $\mathcal{D}_{A^*} \subseteq \mathcal{G}$ în $\mathcal{G}$, compus din elementele $y \in \mathcal{G}$ pentru care există un element $z \in \mathcal{G}$, astfel ca

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle,$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{D}_A$, satisfăcând relației

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{D}_A$ și $y \in \mathfrak{D}_{A^*}$.

Dacă aplicația lineară A este închisă, $\overline{\mathfrak{D}_{A^*}} = \mathfrak{Q}$ și $A^{**} = A$.

Definiția 2. Se spune că o aplicație lineară A a lui $\mathfrak{D}_A$ în $\mathfrak{F}$ este autoadjunctă generalizată dacă satisface următoarele condiții:

(AD_I) $\overline{\mathfrak{D}_A} = \mathfrak{F}$ pentru topologia $\sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{Q})$.

(AD_{II}) Aplicația lineară A este închisă pentru topologia $\sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{Q})$.

(AD_{III}) Restricția $A^*_{\mathfrak{F}}$ a aplicației adjunkte A^* la $\mathfrak{F}$ este identică cu A .

Se spune că o aplicație lineară B a lui $\mathfrak{D}_B$ în $\mathfrak{Q}$ este autoadjunctă generalizată dacă satisface următoarelor condiții:

(AS_I) $\overline{\mathfrak{D}_B} = \mathfrak{Q}$ pentru topologia $\sigma(\mathfrak{Q}, \mathfrak{F})$.

(AS_{II}) Aplicația lineară B este închisă pentru topologia $\sigma(\mathfrak{Q}, \mathfrak{F})$.

(AS_{III}) Restricția $B_{\mathfrak{F}}$ a lui B la $\mathfrak{F}$ este identică cu adjunkta B^* a lui B .

Dacă $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{Q}$, A este slab continuă și B este slab continuă, atunci condițiile (AD_I), (AD_{II}), (AS_I) și (AS_{II}) sînt satisfăcute.

Adjunkta unei aplicații lineare autoadjunkte generalizate este autoadjunctă generalizată.

Definiția 3. Se spune că o aplicație lineară slab continuă N al lui $\mathfrak{F}$ în el însuși sau al lui $\mathfrak{Q}$ în el însuși este normală generalizată dacă $N = A + iB$, unde A și B sînt aplicații lineare slab continue, autoadjunkte generalizate, permutabile.

Adjunkta unei aplicații lineare slab continue normale generalizate este normală generalizată.

Definiția 4. Se spune că o aplicație lineară $\mathcal{U}$ a lui $\mathfrak{Q}$ în el însuși este unitară generalizată dacă $\mathcal{U}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Q}$ și dacă

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle,$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{F}$ și $y \in \mathfrak{Q}$.

Propoziția 1. Dacă U este o aplicație unitară generalizată a lui $\mathfrak{Q}$ în el însuși, atunci U este un izomorfism al lui $\mathfrak{F}$ pe el însuși pentru topologia $\sigma(\mathfrak{F}, \mathfrak{Q})$ și un izomorfism al lui $\mathfrak{Q}$ pe el însuși pentru topologia $\sigma(\mathfrak{Q}, \mathfrak{F})$, iar $\mathcal{U}^{-1}$ este o aplicație unitară generalizată a lui $\mathfrak{Q}$ în el însuși, identică cu adjunkta restricției $U_{\mathfrak{F}}$ a lui U la $\mathfrak{F}$.

3. Limită proiectivă topologică și limită inductivă regulată topologică

Fie (V, T, H) mulțimea spațiilor vectoriale topologice separate (Hausdorff) peste același corp Φ .

Definiția 5. Fie $\mathfrak{S}, \mathfrak{F} \in (V, T, H)$. Se spune că $\mathfrak{S}$ este inclus topologic în $\mathfrak{F}$, și se notează $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{F}$ dacă

1° $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$,

2° $\mathfrak{S}$ admite în $\mathfrak{F}$ un suplimentar topologic și

3° $\mathcal{F}$ induce asupra lui $\mathcal{S}$ o topologie identică cu topologia lui $\mathcal{S}$. Incluziunea topologică este o relație de ordine în mulțime (VTH).

Definiția 6. Se spune că un spațiu $\mathcal{S} \in (VTH)$ este suma proiectivă topologică a unei familii $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subspații vectoriale, și se notează

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda,$$

dacă satisface următoarelor condiții :

(SP_I) Pentru fiecare indice $\lambda \in \Lambda$ există un proiector P_λ al lui $\mathcal{S}$ pe $\mathcal{S}_\lambda$, astfel ca $P_\lambda P_\mu = 0$, oricare ar fi $\lambda \neq \mu$.

(SP_I) Topologia lui $\mathcal{S}$ este cea mai puțin fină dintre topologiile pentru care toți proiectorii P_λ ($\lambda \in \Lambda$) sînt continui.

(SP_{III}) Orice familie $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de elemente $x_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ este sumabilă, iar suma ei aparține lui $\mathcal{S}$.

(SP_{IV}) Relația $x \in \mathcal{S}$ și $P_\lambda x = 0$, oricare ar fi $\lambda \in \Lambda$, implică $x = 0$.

Propoziția 2. Suma proiectivă topologică $\mathcal{S}$ a unei familii $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subspații vectoriale este izomorfă cu spațiul vectorial topologic produs $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{S}_\lambda$.

Definiția 7. Se spune că un spațiu $\mathcal{S} \in (VTH)$ este limita proiectivă topologică a unei familii $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subspații vectoriale, și se notează

$$\mathcal{S} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{pro } \mathcal{F}_\lambda,$$

dacă următoarele condiții sînt satisfăcute.

(LP_I) a) Familia $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, ordonată prin incluziune topologică, este reticulată.

b) Dacă $\mathcal{F}_\lambda \leq \mathcal{F}_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$), atunci subspațiul vectorial $\mathcal{F}_\nu \subseteq \mathcal{F}_\mu$ suplimentar topologic al lui $\mathcal{F}_\lambda$ aparține familiei.

c) Orice șir strict descrescător, în raport cu incluziunea topologică, de spații ale familiei este finit.

(LP_{II}) Pentru fiecare indice $\lambda \in \Lambda$ există un proiector Q_λ al lui $\mathcal{S}$ pe $\mathcal{F}_\lambda$, astfel încît topologia lui $\mathcal{S}$ să fie cea mai puțin fină dintre topologiile pentru care toți proiectorii Q_λ ($\lambda \in \Lambda$) sînt continui.

(LP_{III}). Dacă $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de elemente $x_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$, astfel ca relația $\mathcal{F} \leq \mathcal{F}_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) să implice $Q_\lambda x_\mu = x_\lambda$, atunci șirul generalizat $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ definit de mulțimea Λ , ordonată prin relația $\lambda \leq \mu$ echivalentă cu relația $\mathcal{F}_\lambda \leq \mathcal{F}_\mu$, converge către un element $x \in \mathcal{S}$.

(LP_{IV}) Dacă $x \in \mathcal{S}$ și $Q_\lambda x = 0$, oricare ar fi $\lambda \in \Lambda$, atunci $x = 0$.

Propoziția 3. Dacă $(\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de subspații vectoriale ale unui spațiu $\mathcal{S} \in (VTH)$, astfel ca $\mathcal{S} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{pro } \mathcal{F}_\lambda$, atunci există

o subfamilie unică $(\mathcal{F}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ($\Gamma \subset \Lambda$), compusă din spațiile minimale diferite de $\{0\}$ ale familiei în raport cu incluziunea topologică, astfel ca $\mathcal{S} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{F}_\gamma$.

Fie (LCH) mulțimea spațiilor local convexe separate peste același corp Φ , $\mathbb{S} \in (LCH)$, $\mathbb{S}^*$ dualul topologic al lui $\mathbb{S}$; $\mathbb{S}_\sigma^*$, $\mathbb{S}_\beta^*$ și $\mathbb{S}_\tau^*$ spațiul $\mathbb{S}^*$ înzestrat respectiv cu topologiile $\sigma(\mathbb{S}^*, \mathbb{S})$, $\beta(\mathbb{S}^*, \mathbb{S})$ și $\tau(\mathbb{S}^*, \mathbb{S})$, iar $\mathbb{S}_\sigma$ și $\mathbb{S}_\tau$ spațiul $\mathbb{S}$ înzestrat respectiv cu topologiile $\sigma(\mathbb{S}, \mathbb{S}^*)$ și $\tau(\mathbb{S}, \mathbb{S}^*)$.

Propoziția 4. Dacă $\mathbb{S}, \mathbb{F} \in (LCH)$ și $\mathbb{S} \leq \mathbb{F}$, atunci $\mathbb{S}_\sigma^* \leq \mathbb{F}_\sigma^*$ și $\mathbb{S}_\tau^* \leq \mathbb{F}_\tau^*$, exceptând un izomorfism.

Definiția 8. Fie $(\mathbb{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie de spații din (LCH) satisfăcând condițiilor a), b) și c). Se numește limita inductivă regulată a familiei reuniunea $\mathbb{F}$ a familiei, înzestrată cu topologia local convexă cea mai fină pentru care toate aplicațiile canonice ale spațiilor familiei în $\mathbb{F}$ sînt continue, și se notează pe scurt

$$\mathbb{F} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{ind } \mathbb{F}_\lambda.$$

Propoziția 5. Limita inductivă regulată $\mathbb{F}$ a unei familii $(\mathbb{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de spații din (LCH) , satisfăcând condițiilor a), b) și c), este identică cu suma directă topologică a subfamiliei $(\mathbb{F}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ ($\Gamma \subseteq \Lambda$) spațiilor minimale diferite de $\mathcal{O}$ ale familiei, în raport cu incluziunea topologică.

Din proprietățile cunoscute ale produsului topologic și sumei directe topologice de spații din (LCH) rezultă

Teorema 2. Dacă

$$\mathbb{S} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{pro } \mathbb{S}_\lambda,$$

atunci

$$\mathbb{S}_\sigma^* = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{ind } \mathbb{S}_{\lambda, \beta}^*$$

și

$$\mathbb{S}_\tau^* = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{ind } \mathbb{S}_{\lambda, \tau}^*.$$

Dacă

$$\mathbb{F} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{ind } \mathbb{F}_\lambda,$$

atunci

$$\mathbb{F}_\sigma^* = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{pro } \mathbb{F}_{\lambda, \sigma}^*,$$

$$\mathbb{F}_\beta^* = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{pro } \mathbb{F}_{\lambda, \beta}^*$$

și

$$\mathbb{F}_\tau^* = \lim_{\lambda \in \Lambda} \text{pro } \mathbb{F}_{\lambda, \tau}^*.$$

4. Reuniune topologică și ingersecție topologică

Definiția 9. Fie $\mathbb{S}, \mathbb{F} \in (LCH)$. Se spune că $\mathbb{S}$ este inclus dens în $\mathbb{F}$, și se notează $\mathbb{S} \leq \mathbb{F}$, dacă

1° $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{F}$,

2° topologia lui $\mathbb{F}$ induce asupra lui $\mathbb{S}$ o topologie mai puțin fină decît topologia lui $\mathbb{S}$ și

3° $\overline{\mathbb{S}} = \mathbb{F}$.

Incluziunea densă este o relație de ordine în mulțimea (LCH) .

Propoziția 6. Dacă $\mathfrak{S}, \mathfrak{F} \in (LCH)$ și $\mathfrak{S} \leq \mathfrak{F}$, atunci $\mathfrak{S}_\sigma \leq \mathfrak{F}_\sigma$ și $\mathfrak{S}_\tau \leq \mathfrak{F}_\tau$.

Teorema 3. Dacă $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{Q}_1)$ și $(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{Q}_2)$ sînt două cupluri de spații vectoriale în dualitate peste același corp Φ , și dacă $\mathfrak{F}_{1,\sigma} \leq \mathfrak{F}_{2,\sigma}$, atunci $G_{2,\sigma} \leq G_{1,\sigma}$, exceptînd un izomorfism.

Teorema 4. Fie $((\mathfrak{F}_\lambda, \mathfrak{Q}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ o familie de cupluri de spații vectoriale, peste același corp Φ , în dualitate dreaptă, respectiv în raport cu formele bilineare ale unei familii $(\langle x, y \rangle_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, astfel ca familia $(\mathfrak{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ să fie ordonată filtrantă superior în raport cu incluziunea densă, pentru topologiile slabe, $\mathfrak{F}$ reuniunea familiei $(\mathfrak{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ și $\mathfrak{Q}$ intersecția familiei $(\mathfrak{Q}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, identificînd spațiile izomorfe. Familia $(\mathfrak{Q}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este atunci ordonată filtrantă inferior în raport cu incluziunea densă, exceptînd izomorfisme, pentru topologiile slabe și topologiile lui Mackey, cuplul $(\mathfrak{F}, \mathfrak{Q})$ este în dualitate dreaptă în raport cu forma bilineară definită de egalitatea

$$\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_\lambda,$$

oricare ar fi $x \in \mathfrak{F}_\lambda$ și $y \in \mathfrak{Q}_\lambda$, pentru fiecare $\lambda \in \Lambda$, $\mathfrak{F}$ este marginea superioară a familiei $(\mathfrak{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ în raport cu incluziunea densă, pentru topologiile slabe și topologiile lui Mackey, iar $\mathfrak{Q}$ este marginea inferioară a familiei $(\mathfrak{Q}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ în raport cu incluziunea densă, pentru aceleași topologii.

Dacă cuplurile familiei $((\mathfrak{F}_\lambda, \mathfrak{Q}_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ sînt în dualitate stîngă, atunci pentru ca $(\mathfrak{F}, \mathfrak{Q})$ să fie în dualitate în raport cu forma bilineară $\langle x, y \rangle$ este necesar și suficient ca $\mathfrak{Q}$ să fie diferit de $\mathcal{O}$. Dacă această condiție este satisfăcută, atunci $\mathfrak{F}$ este marginea superioară a familiei $(\mathfrak{F}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ în raport cu incluziunea densă pentru topologiile slabe și topologiile lui Mackey, iar $\mathfrak{Q}$ este marginea inferioară a familiei $(\mathfrak{Q}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, în raport cu incluziunea densă, pentru aceleași topologii.

Această teoremă justifică următoarea

Definiția 10. Se numește reuniune topologică a unei familii $(\mathfrak{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de spații din (LCH) ordonată filtrant superior în raport cu incluziunea densă, marginea superioară a familiei în raport cu această relație de ordine. Se numește intersecție topologică a unei familii $(\mathfrak{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de spații din (LCH) ordonată filtrant inferior în raport cu incluziunea densă, marginea inferioară (cînd există) a familiei în raport cu aceeași relație de ordine.

Dacă $\mathfrak{S}, \mathfrak{F} \in (LCH)$ sînt două spații izomorfe se notează $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{F}$.

Fie $(\mathfrak{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie de spații din (LCH) ,

$$\mathfrak{S} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_\lambda$$

suma lor directă topologică și

$$\mathfrak{Q} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_\lambda$$

produsul lor topologic. Fie $(\mathfrak{S}_\lambda^*)_{\lambda \in \Lambda}$ familia dualelor înzestrate cu topologiile slabe (resp. topologiile lui Mackey). Dualul $\mathfrak{S}^*$, înzestrat cu topologia slabă $\sigma(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$) este izomorf cu

$$\mathfrak{S}^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_\lambda^*,$$

iar dualul $\mathfrak{A}^*$, înzestat cu topologia $\tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$ a lui Mackey, este izomorf cu

$$\mathfrak{A}^* \equiv \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_{\lambda}^*$$

pentru aceleași topologii. Dacă $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ este un cuplu în dualitate și $\mathfrak{S}$ un subspațiu vectorial al lui $\mathfrak{F}$, subspațiul lui $\mathfrak{G}$, ortogonal lui $\mathfrak{S}$, se notează $\mathfrak{S}^0$.

Teorema 5. Dacă $(\mathfrak{S}_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de spații din (LCH) ordonată filtrant superior în raport cu incluziunea densă și

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_{\lambda}$$

reuniunea lor topologică, atunci familia $(\mathfrak{S}_{\lambda, \sigma}^*)_{\lambda \in \Lambda}$ este ordonată filtrant inferior în raport cu incluziunea densă (exceptând izomorfisme),

$$\mathfrak{S}_{\sigma}^* = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_{\lambda, \sigma}^*$$

este intersecția topologică a familiei $(\mathfrak{S}_{\lambda, \sigma}^*)_{\lambda \in \Lambda}$,

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S} / \mathfrak{S}^{*0}$$

pentru topologia $\sigma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$) asupra lui $\mathfrak{S}$ și topologia cât prin $\mathfrak{S}^{*0}$ a topologiei $\sigma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$) asupra lui $\mathfrak{S} / \mathfrak{S}^{*0}$, relativă la dualitatea cuplului $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$ identică cu topologia $\sigma(\mathfrak{S} / \mathfrak{S}^{*0}, \mathfrak{S}^*)$ (resp. $\tau(\mathfrak{S} / \mathfrak{S}^{*0}, \mathfrak{S}^*)$) relativă la dualitatea cuplului $(\mathfrak{S} / \mathfrak{S}^{*0}, \mathfrak{S}^*)$ iar

$$\mathfrak{S}^* \equiv \mathfrak{S}^* / \mathfrak{S}^{\circ}$$

pentru topologia $\sigma(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$) asupra lui $\mathfrak{S}^*$ și topologia cât prin $\mathfrak{S}^0$ a topologiei $\sigma(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$), relativă la dualitatea cuplului $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$, asupra lui $\mathfrak{S}^* / \mathfrak{S}^0$ identică cu topologia $\sigma(\mathfrak{S}^* / \mathfrak{S}^0, \mathfrak{S})$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}^* / \mathfrak{S}^0, \mathfrak{S})$) relativă la dualitatea cuplului $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^* / \mathfrak{S}^0)$.

Teorema 6. Dacă $(\mathfrak{S}_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ este o familie de spații din (LCH) ordonată filtrant inferior în raport cu incluziunea densă, dacă toate cuplurile $(\mathfrak{S}_{\lambda}, \mathfrak{S}_{\lambda}^*)$ ($\lambda \in \Lambda$) sînt în dualitate dreaptă sau toate în dualitate stîngă și $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_{\lambda} \neq \emptyset$, iar

$$\mathfrak{S} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_{\lambda}$$

intersecția topologică a familiei, atunci familia $(\mathfrak{S}_{\lambda, \tau}^*)_{\lambda \in \Lambda}$ este filtrantă superior în raport cu incluziunea densă,

$$\mathfrak{S}_{\tau}^* = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{S}_{\lambda, \tau}^*$$

este reuniunea topologică a familiei $(\mathfrak{S}_{\lambda, \tau}^*)_{\lambda \in \Lambda}$,

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{A} / \mathfrak{S}^{*0}$$

pentru topologia $\sigma(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}^*)$) asupra lui $\mathfrak{S}$ și topologia cât prin $\mathfrak{S}^{*0}$ a topologiei $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$ (resp. $\tau(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$), relativă la dualitatea cuplului

$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$ asupra lui $\mathfrak{A}/\mathfrak{S}^{*0}$, identică cu topologia $\sigma(\mathfrak{A}/\mathfrak{S}^{*0}, \mathfrak{S}^*)$ (resp. $\tau(\mathfrak{A}/\mathfrak{S}^{*0}, \mathfrak{S}^*)$) relativă la dualitatea cuplului $(\mathfrak{A}/\mathfrak{S}^{*0}, \mathfrak{S})$, iar

$$\mathfrak{S}^* \equiv \mathfrak{A}^*/\mathfrak{S}^0$$

pentru topologia $\sigma(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$ (resp. $\tau(\mathfrak{S}^*, \mathfrak{S})$) asupra lui $\mathfrak{S}^*$ și topologia cât prin $\mathfrak{S}^0$ a topologiei $\sigma(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$ (resp. $\tau(\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A})$) relativă la dualitatea cuplului $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^*)$ asupra lui $\mathfrak{A}^*/\mathfrak{S}^0$, identică cu topologia $\sigma(\mathfrak{A}^*/\mathfrak{S}^0, \mathfrak{S})$ (resp. $\tau(\mathfrak{A}^*/\mathfrak{S}^0, \mathfrak{S})$) relativă la dualitatea cuplului $(\mathfrak{S}, \mathfrak{A}^*/\mathfrak{S}^0)$.

5. Spații local convexe canonice de bază hilbertiană

Fie $(\mathcal{H})$ (resp. $(\mathcal{H}_0)$) clasa spațiilor hilbertine de tip oarecare (resp. de tip numerabil) peste același corp Φ , $\mathfrak{A}$ (resp. $\mathfrak{A}_0$) operația reuniune topologică a unei familii (resp. a unui șir), $\mathfrak{D}$ (resp. $\mathfrak{D}_0$) operația intersecție topologică a unei familii (resp. a unui șir), $\mathfrak{I}$ (resp. $\mathfrak{I}_0$) operația limită proiectivă a unei familii (resp. a unui șir) și $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{J}_0$) operația limită inductivă regulată a unei familii (resp. a unui șir) de spații din (LCH) .

Spațiile hilbertiene posedă următoarea proprietate.

Teorema 7. Pentru fiecare operator închis A definit pe un subspațiu vectorial peste tot dens $\mathcal{H}_1$ al unui spațiu hilbertian $\mathcal{H}_0$ există o structură de spațiu hilbertian asupra lui $\mathcal{H}_1$ definită de produsul scalar

$$(x | y)_1 = (x | y)_0 + (Ax | Ay)_0,$$

unde $(x | y)_0$ este produsul scalar al lui $\mathcal{H}_0$, astfel ca $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_0$ pentru incluziunea densă, iar H_1 și H_0 au aceeași dimensiune hilbertiană (infinită).

Datorită acestei proprietăți se poate enunța

Teorema 8. Există spații de orice clasă obținute prin aplicarea succesivă în număr finit clasei $(\mathcal{H})$ (resp. $(\mathcal{H}_0)$) a operațiilor $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}$ și $\mathfrak{J}$ (resp. $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{I}_0$ și $\mathfrak{J}_0$) cu condiția ca operațiilor $\mathfrak{A}$ sau $\mathfrak{D}$ să le urmeze operațiile $\mathfrak{I}$ sau $\mathfrak{J}$ și reciproc.

Astfel spațiile superhilbertiene [3] sînt de clasă $(\mathfrak{I} \mathcal{H})$ adică sînt limite proiective de spații hilbertiene, iar dualele lor tari sînt de clasă $(\mathfrak{J} \mathcal{H})$, adică sînt limite inductive regulate de spații hilbertiene, spațiul $\mathfrak{D}$ al lui L. Schwartz, al funcțiilor indefinit derivabile cu suport compact, este de clasă $(\mathfrak{J}_0 \mathfrak{D}_0 \mathcal{H}_0)$, iar dualul său tare $\mathfrak{D}^*$ de clasă $(\mathfrak{I}_0 \mathfrak{A}_0 \mathcal{H}_0)$. Dacă $\mathcal{H}_{k,n}$ este spațiul hilbertian al funcțiilor complexe $f(x)$ definite pe dreapta reală, de k ori derivabile, astfel ca $f^{(k)}(x)$ să fie de pătrat integrabil Lebesgue cu suportul inclus în intervalul $[-n, n]$, înzestrat cu norma

$$p_{k,n}(f) = \left(\int_{-n}^n \sum_{j=0}^k |f^{(j)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

atunci

$$\mathfrak{D} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ind} \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathcal{H}_{k,n}$$

și

$$\mathfrak{D}^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{pro} \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathcal{H}_{k,n}^*.$$

Spațiul $\mathfrak{S}$ al funcțiilor complexe indefinit derivabile cu suport oarecare al lui L. Schwartz, este de clasă $(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0 \mathcal{H}_0)$, iar dualul său tare $\mathfrak{S}^*$ de clasă $(\mathcal{J}_0, \mathfrak{R}_0 \mathcal{H}_0)$. Dacă $\mathfrak{D}_{k,n}$ este spațiul hilbertian al funcțiilor complexe $f(x)$, definite pe dreapta reală, de k ori derivabile, periodice de perioadă 2^{n+1} astfel ca $f^{(k)}(x)$ să fie de pătrat integrabil Lebesgue pe intervalul $[-2^n, 2^n]$, înzestrat cu norma

$$q_{k,n}(f) = \frac{\lambda}{2^n} \left(\sum_{-2^n}^{2^n} |f^{(k)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

atunci

$$\mathfrak{S} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{pro} \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathfrak{D}_{k,n}$$

și

$$\mathfrak{S}^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{ind} \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathfrak{D}_{k,n}^*.$$

Spațiul $\mathfrak{S}$ al funcțiilor indefinit derivabile al lui L. Schwartz este de clasă $(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_0 \mathcal{H}_0)$, iar dualul său tare $\mathfrak{S}^*$ de clasă $(\mathfrak{R}_0, \mathcal{J}_0 \mathfrak{R}_0 \mathcal{H}_0)$.

Familia spațiilor construite conform teoremei precedente se numesc *spații local convexe canonice de bază hilbertiană*.

Următoarele proprietăți ale spațiilor local convexe se conservă prin oricare din cele patru operații $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{I}$ și $\mathcal{J}$:

- 1° de a fi separat (Hausdorff) și reciproc,
- 2° de a fi complet și reciproc,
- 3° de a fi semireflex (în sensul lui N. Bourbaki) și reciproc,
- 4° de a fi reflexiv (în sensul lui N. Bourbaki) și reciproc,
- 5° de a fi cvasi-concentrat („quasi tonnelé” în sensul lui A. Grothendieck) și reciproc,
- 6° de a fi concentrat („tonnelé”).

Următoarele proprietăți se conservă prin oricare din cele patru operații R_0 , D_0 , P_0 și I_0 :

- 7° de a fi un spațiu Montel (în sensul lui N. Bourbaki),
- 8° de a fi un spațiu cvasi-normabil (în sensul lui A. Grothendieck),
- 9° de a fi un spațiu bornologic (în sensul lui N. Bourbaki) și
- 10° de a fi un spațiu Schwartz (în sensul lui A. Grothendieck).

6. Reprezentări spectrale

Fie $\mathfrak{S}$ un spațiu de clasă $(\mathfrak{D} \mathcal{H})$, $\mathfrak{S}^*$ dualul antilinear tare al lui $\mathfrak{S}$ de clasă $(\mathcal{J} \mathcal{H})$, identificat cu un subspațiu vectorial peste tot dens $\mathfrak{Q}$ al lui $\mathfrak{S}$ și A un operator continuu autoadjunct generalizat definit pe $\mathfrak{Q}$, deci satisfăcând relației

$$A_{\mathfrak{Q}}^* = A.$$

Există atunci o familie unică $(E_\lambda)_{\lambda \in \Psi}$ de proiectori spectrali continui autoadjuncți generalizați definiți pe $\mathcal{G}$, întinsă pe dreapta reală Ψ , astfel ca

$$(x | A y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(x | E_\lambda y)$$

oricare ar fi $x, y \in \mathcal{G}$. Dacă $f(\lambda)$ este o funcție complexă definită pe Ψ , măsurabilă și mărginită în măsură în raport cu toate funcțiile crescătoare ale familiei $((x | E_\lambda x))_{\lambda \in \Psi}$, atunci există un operator continuu unic $f(A)$ normal generalizat definit pe $\mathcal{G}$, astfel ca

$$(x | f(A)y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) d(x | E_\lambda y)$$

oricare ar fi $x, y \in \mathcal{G}$.

Există o strînsă legătură între operatorii autoadjuncți definiți dens într-un spațiu hilbertian și operatori continui autoadjuncți generalizați definiți pe un spațiu superhilbertian metrizabil $\mathfrak{F}$ de clasă $(\mathfrak{D}_0 \mathcal{H})$ stabilită de

Teorema 8. *Orice operator autoadjunct A definit pe un subspațiu vectorial peste tot dens $\mathfrak{D}_A$ al unui spațiu hilbertian $\mathcal{H}$ poate fi prelungit într-un singur mod, într-un operator continuu autoadjunct generalizat $\bar{A}$ definit pe un spațiu superhilbertian metrizabil $\mathfrak{F}$, unic exceptînd un izomorfism, depinzînd de A , în care $\mathfrak{D}_A$ este peste tot dens.*

Fie $\mathfrak{D}$ un spațiu de clasă $(\mathfrak{D}_0 \mathcal{H})$, adică de forma

$$\mathfrak{D} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n,$$

unde $(\mathcal{H}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir strict descrescător în raport cu incluziunea densă, de spații hilbertiene,

$$\mathfrak{D}^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_n^*$$

dualul antilinear tare al lui $\mathfrak{D}$ și A un operator continuu autoadjunct generalizat definit pe $\mathfrak{D}$ satisfăcînd deci relației $A_{\mathfrak{D}}^* = A$.

Propoziția 6. *Dacă A este un operator autoadjunct definit pe un subspațiu vectorial peste tot dens $\mathfrak{D}$ al unui spațiu hilbertian $\mathcal{H}$, astfel ca $A(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}$, atunci există o prelungire autoadjunctă continuă unică a lui A pe întreg spațiul $\mathcal{H}$.*

Rezultă că A se poate prelunge în fiecare spațiu $\mathcal{H}_n$ într-un operator autoadjunct continuu A_n , definit pe întreg spațiul $\mathcal{H}_n$. Există deci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ o familie spectrală unică $(E_{n,\lambda})_{\lambda \in \Psi}$, întinsă pe un interval mărginit $[\alpha_n, \beta_n]$ al dreptei reale, astfel ca

$$(A_n x | y)_n = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \lambda d(E_{n,\lambda} x | y)_n,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathcal{H}_n$, unde $(x|y)_n$ este produsul scalar al spațiului $\mathcal{H}_n$. Dacă $\Sigma_{n,p}(A_n)$ este spectrul punctual al lui A_n în raport cu $\mathcal{H}_n$ și $\Sigma_p(A)$ spectrul punctual al lui A în raport cu $\mathcal{D}$, atunci

$$\Sigma_p(A) = \overline{\bigcup_{n \in N} \Sigma_{n,p}(A)},$$

unde $\Sigma_{n,p}(A)$ este restricția lui $\Sigma_{n,p}(A_n)$ la A .

Dacă, spre exemplu, fiecare spațiu hilbertian $\mathcal{H}_n$ ($n \in N$) este de tip numerabil (separabil) (spre exemplu cazul spațiului $\mathcal{D}_{K_n}$ al lui Schwartz), atunci $\Sigma_{n,p}(A)$ este cel mult infinit numerabil însă $\Sigma_p(A)$ poate fi de măsura Lebesgue > 0 .

Orice operator continuu autoadjunct generalizat definit pe un spațiu $\mathcal{S}$ dintr-o clasă de tip $(\mathfrak{A}_0 \mathcal{C})$, $(\mathfrak{D}_0 \mathcal{C})$, $(\mathfrak{A}_0 \mathcal{C})$ sau $(\mathcal{J}_0 \mathcal{C})$ se reduce sau poate fi prelungit în fiecare spațiu $\mathcal{S}_n$ din clasa $(\mathcal{C})$, utilizat pentru construcția spațiului $\mathcal{S}$, la un operator continuu de aceeași natură. În consecință cunoscînd reprezentarea spectrală a oricărui operator continuu autoadjunct generalizat pe un spațiu $\mathcal{S}$ dintr-o clasă $(\mathcal{C})$ de spații local convexe canonice, se poate totdeauna determina reprezentarea spectrală a oricărui operator continuu autoadjunct generalizat definit pe orice spații $\mathcal{S}_1$ și $\mathcal{S}_2$, respectiv din cele două clase următoare. Dacă clasa $(\mathcal{C})$ este de tipul $(\mathfrak{A}_0 \mathcal{C}_0)$ sau $(\mathfrak{D}_0 \mathcal{C}_0)$, atunci clasele următoare sînt de tipul $(\mathfrak{A}_0 \mathcal{C})$ și $(\mathcal{J}_0 \mathcal{C})$, iar dacă clasa $(\mathcal{C})$ este de tipul $(\mathfrak{A}_0 \mathcal{C}_0)$ sau $(\mathcal{J}_0 \mathcal{C}_0)$, atunci clasele următoare sînt de tipul $(\mathfrak{A}_0 \mathcal{C})$ și $(\mathfrak{D}_0 \mathcal{C})$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] N. BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques ch. I, II, Paris, Hermann 1953.
- [2] — : Espaces vectoriels topologiques, ch. III, IV, V Paris Hermann 1955.
- [3] AL. GHIKA : Sume proiective topologice de spații vectoriale topologice. Com. Acad. R.P.R. IX, 11, 1959
- [4] — : Operatori autoadjuncți în spații superhilbertiene, Com. Acad. R.P.R. X.1 1960.
- [5] — : Spații superhilbertiene și Mecanica Cuantică Com. Acad. RPR, X 4, 1960
- [6] — : Operatori unitari în spații superhilbertiene Com. Acad. RPR, X 4, 1960
- [7] — : Prelungirea operatorilor autoadjuncți în spații superhilbertiene. Com. Acad. RPR, X, 6, 1960.
- [8] — : O proprietate generală a dualității în spațiile local convexe. Com. Acad. RPR XI, 4 1961.
- [9] — : O proprietate generală a spațiilor hilbertiene. Com. Acad. RPR XII 2, 1962.
- [10] — : O relație de ordine în mulțimea spațiilor local convexe, Com. Acad. RPR XII, 4. 1962.
- [11] — : Reuniune topologică și intersecție topologică de spații local convexe, Com. Acad. RPR XII, 4 1962.
- [12] — : Limită proiectivă și limită inductivă regulată de spații local convexe. Com. Acad. RPR XII 4. 1962
- [13] — : Spații local convexe canonice. Com. Acad. RPR XII, 5 1962.
- [14] — : Transpositions des opérations linéaires fermées à domaines dense dans les espaces localement convexes. Rev. Math. pures et app. Acad. RPR, VII, 1. 1962.
- [15] — : Condiții de existența ale reuniunii și intersecției topologice de spații local convexe. Com. Acad. RPR, XIII 6, 1963.

- [16] AL. GHICA : Formes linéaires continues dans les limites projectives et les limites inductives régulières d'espaces localement convexes. Bull. Math. Soc. Math. Phys. RPR (sub tipar)
- [17] — :Espaces localement convexes canoniques Rev. Math. p. appl. Acad. RPR (sub tipar)
- [18] H. H. SCHAEFER : Spectral mesures in locally convex algebras Acta Math. v. 107, 1962 nr. 1—2, p. 125—173
- [19] L. SCHWARTS : Théorie de distributions I, II, Paris, Hermann.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В МЕСТНЫХ ВЫПУКЛЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В первом сечении определяется правая и левая двойственность пары векторных пространств.

Используя сечение правой двойственности (левой) вводим во второе сечение понятия обобщенных самоадьюнктных, нормальное обобщенное применение, единое обобщенное применение.

В третье сечение вводится топологическая проективная грань семейства векторных подпространств векторного топологического отдельного пространства, а также индуктивная регулярная грань семьи местных выпуклых отдельных пространств. Далее показана связь с непосредственной топологической суммой, а также даны свойства двойственного числа.

В четвертом сечении вводится топологическое объединение и топологическое пересечение семейства местных выпуклых, отдельных пространств одновременно с различными теоремами.

В пятое сечение вводятся местные выпуклые пространства гильбертовской основы.

Наконец, последнее сечение занимается спектральными представлениями самоадьюнктных обобщенных операторов.

DES OPÉRATEURS LINÉAIRES DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES CANONIQUE

RÉSUMÉ

Dans la première section on définit la dualité droite et gauche d'un couple d'espaces vectoriels.

En employant la notion de dualité droite (gauche), on introduit dans la deuxième section les notions de : auto-adjonction généralisée, d'application normale généralisée, et application unitaire généralisée.

Dans la troisième section on introduit la limite projective topologique d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel topologique séparé, ainsi que la limite inductive régulière d'une famille d'espaces localement convexes séparés. On y indique le rapport avec la somme directe topologique et on y présente les propriétés du dual.

Au cours de la quatrième section on y introduit la réunion topologique et l'intersection topologique d'une famille d'espaces localement convexes séparés et l'on présente certains théorèmes.

Dans la cinquième section on introduit les espaces localement convexes à base hilbertienne.

Dans la dernière section enfin il est question des représentations spectrales des opérateurs auto-adjoints généralisés.

CONDIȚII LA LIMITĂ ÎN MIȘCAREA FIRELOR EXTENSIBILE -II

N. CRISTESCU

Într-un articol precedent [1] a fost discutată problema condițiilor la limită în mișcarea rapidă a firelor extensibile. În acel articol au fost discutate așa numitele condiții la limită cinematice. Conform acestor condiții trebuie cunoscută mișcarea punctelor de la capetele firului, deformația și viteza longitudinală obținându-se prin calcul cu ajutorul unui algoritm special, adaptat la o mașină electronică. Într-o altă lucrare [2] s-a discutat problema condițiilor la limită dinamice, cînd la un capăt al firului (sau la ambele) este atașat un corp de o anumită masă ce influențează tensiunea în fir în punctul considerat. În acest caz este necesar alt algoritm pentru aflarea funcțiilor necunoscute în acel punct.

Cu aceste două tipuri de condiții la limită au fost rezolvate mai multe exemple. În toate s-a considerat firul elastic, satisfăcînd o lege constitutivă de forma

$$T = 72,1 \times 10^6 \varepsilon \text{ gr/cm}^2 \quad (1)$$

în care T este tensiunea în fir iar ε este deformația dată în procente. Mai jos vor fi comparate rezultatele obținute în cazul a patru exemple. În toate exemplele firul a fost presupus finit și de lungime inițială $l_0 = 25$ cm. Poziția inițială este rectilinie, firul aflîndu-se în repaus. Axele de coordonate au fost astfel alese încît în poziția inițială firul să fie așezat în lungul axei Ox pozitiv, între punctele $x = 0$ și $x = 25$ cm. Prin urmare condițiile inițiale sînt

$$\left. \begin{array}{l} t = 0 \\ 0 \leq s_0 \leq l_0 \end{array} \right\} x_t = y_t = 0, \quad x_{s_0} = 1,04, \quad y_{s_0} = 0, \quad \varepsilon = 0,02 \quad v = 0 \quad (2)$$

(notațiile sînt cele din [2]).

Condițiile la limită în cele patru cazuri considerate sînt distincte.

În cazul I, capătul $s_0 = l_0$ este menținut tot timpul fix, deci

$$s_0 = l_0, \quad t \geq 0: \quad x_t = y_t = v = 0 \quad (3)$$

iar capătul $s_0 = 0$ este mobil, conform relației

$$s_0 = 0, \quad t \geq 0: \quad x_t = 0, \quad y_t = -10^5 \sin(10^3 t) \quad (4)$$

y_t fiind dat în cm/sec.

În cazul II condițiile la capătul $s_0 = l_0$ coincid cu (3), pe cînd la celălalt capăt sînt

$$s_0 = 0 \begin{cases} 0 \leq t \leq 22 \times 10^{-5} \text{ sec} : x_t = 0, y_t \text{ crește} \\ 24 \times 10^{-5} \text{ sec} \leq t \leq 48 \times 10^{-5} \text{ sec} : x_t = 0, y_t \text{ descrește} \\ 48 \times 10^{-5} \text{ sec} \leq t : x_t = 0, y_t = 0 \end{cases} \quad (5)$$

În intervalul în care crește, y_t variază conform relației (4), iar descreșterea are loc după o lege simetrică.

În cazul III condițiile la capătul $s_0 = l_0$ de asemenea coincid cu (3), iar condițiile la capătul mobil sînt

$$s_0 = 0 \begin{cases} 0 \leq t \leq 24 \times 10^{-5} \text{ sec} : x_t = 0, y_t = -10^5 \sin(10^3 t) \text{ cm/sec} \\ 24 \times 10^{-5} \text{ sec} \leq t : x_t = 0, y_t = 237,69 \text{ m/sec.} \end{cases} \quad (6)$$

În sfîrșit în cazul IV condițiile la limită la $s_0 = l_0$ din nou coincid cu (3) pe cînd la capătul $s_0 = 0$ într-o primă etapă s-a aplicat o condiție la limită de tip cinematic iar într-o a doua etapă o condiție la limită de tip dinamic. Deci aceste condiții la limită sînt următoarele. În intervalul $0 \leq t \leq 22 \times 10^{-5} \text{ sec.}$ se aplică condițiile (4) iar apoi pentru $t \geq 22 \times 10^{-5} \text{ sec}$ condițiile

$$s_0 = 0, t \geq 22 \times 10^{-5} \text{ sec} : x_t = 0, M dy_t = 2\lambda T \frac{y_{s_0}}{1 + \varepsilon} dt \quad (7)$$

unde M este masa corpului atașat la acest capăt al firului, iar λ este aria secțiunii transversale a firului. Desigur că în cele două intervale considerate $0 \leq t \leq 22 \times 10^{-5} \text{ sec}$ și $t \geq 22 \times 10^{-5} \text{ sec.}$, la capătul $s_0 = 0$ se aplică algoritme diferite pentru a găsi celelalte funcțiuni necunoscute.

În toate cele patru probleme considerate, datorită mișcării capătului mobil $s_0 = 0$, firul se va alungi și-și va schimba forma, datorită propagării simultane în fir a undelor longitudinale și transversale. Va avea loc și un proces de reflectare simultană a celor două tipuri de unde de la cele două capete ale firului. Conform relației (1) undele longitudinale se propagă cu viteza constantă $c_{II} = 2500 \text{ m/sec.}$ pe cînd undele transversale se propagă cu viteza variabilă

$$c_I = \sqrt{\frac{T}{\rho_0(1 + \varepsilon)}}$$

care pentru $\varepsilon = 0,02$ este $c_I(0,02) = 348 \text{ m/sec}$ și apoi crește : pentru $\varepsilon = 10\%$ se obține $c_I(0,1) = 749 \text{ m/sec.}$

Detalii privind schema de calcul utilizată nu vor fi date aici. În toate cazurile a fost utilizată mașina electronică CIFA 101.

Pentru a se vedea influența condițiilor la limită asupra variației diferitelor funcții necunoscute și asupra propagării undelor în fir, au fost

construite unele grafice. În fig. 1 este dată variația deformației la capătul $s_0 = 0$ pentru cele patru cazuri considerate. Se constată că în afară de primul caz, în celelalte trei deformația variază destul de neregulat. În

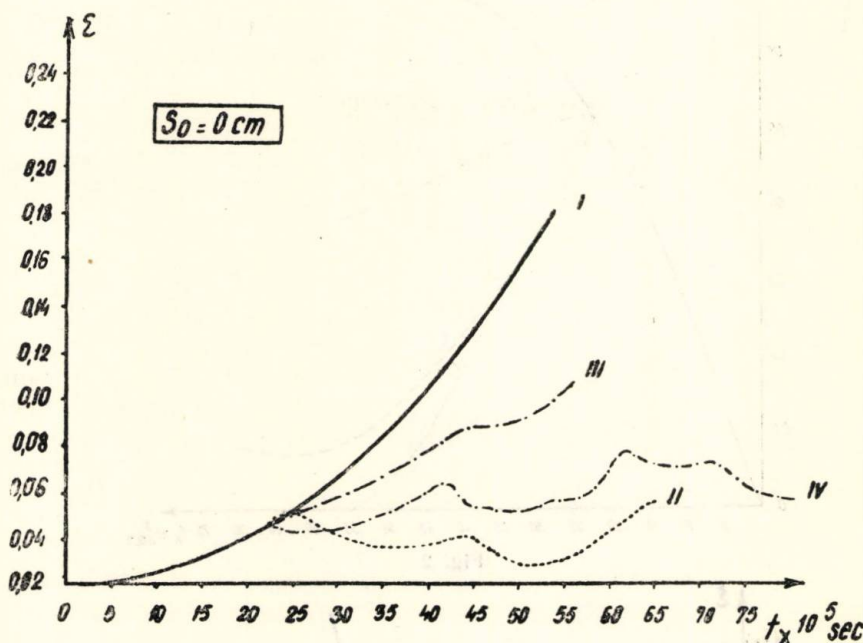


Fig. 1

ceea ce privește variația pantei firului în acest punct, ea este dată în fig. 2. În primul caz ea crește continuu, pe cînd în celelalte panta crește și apoi descrește. În acele cazuri (II și IV) în care unde transversale sînt generate la un moment dat la capătul $s_0 = 0$, panta redevine crescătoare.

Diagrame similare au fost construite și pentru capătul $s_0 = l_0$. Aici condițiile la limită în cele patru cazuri sînt aceleași. Este utilizat și același algoritm de calcul. Totuși considerarea diferitelor condiții la limită la capătul $s_0 = 0$ conduce la rezultate distincte la cel de-al doilea capăt. Variația deformației la acest capăt este reprezentată în fig. 3 iar variația pantei în fig. 4. În această ultimă figură se poate observa scăderea pantei datorită reflectării undelor transversale. De remarcat variația cu totul diferită a deformației în cele patru cazuri considerate. Desigur că această variație depinde și de reflectările succesive, ale celor două tipuri de unde de la capătul fix al firului. Aceste reflectări succesive au fost reprezentate în fig. 5. Prin linia subțire a fost reprezentată aici propagarea și reflectarea succesivă de la cele două capete fixe ale firului a primului front de undă longitudinală ce se propagă în fir. Această undă se propagă cu viteză constantă. A fost reprezentată și propagarea și reflectarea de la capătul fix a primului front de undă transversală. De remarcat

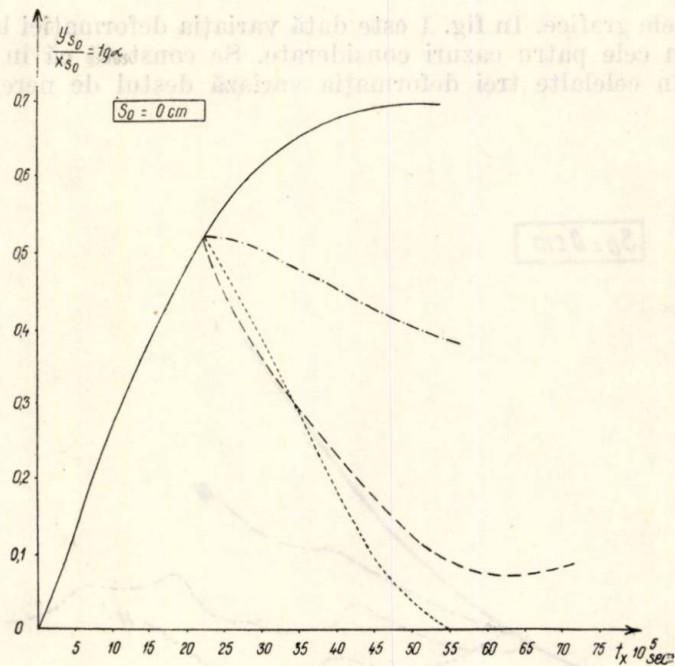


Fig. 2

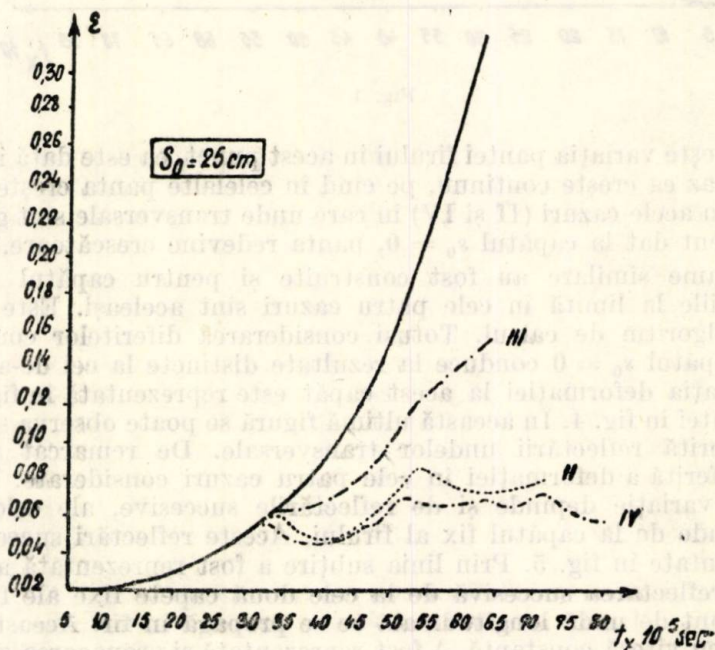


Fig. 3

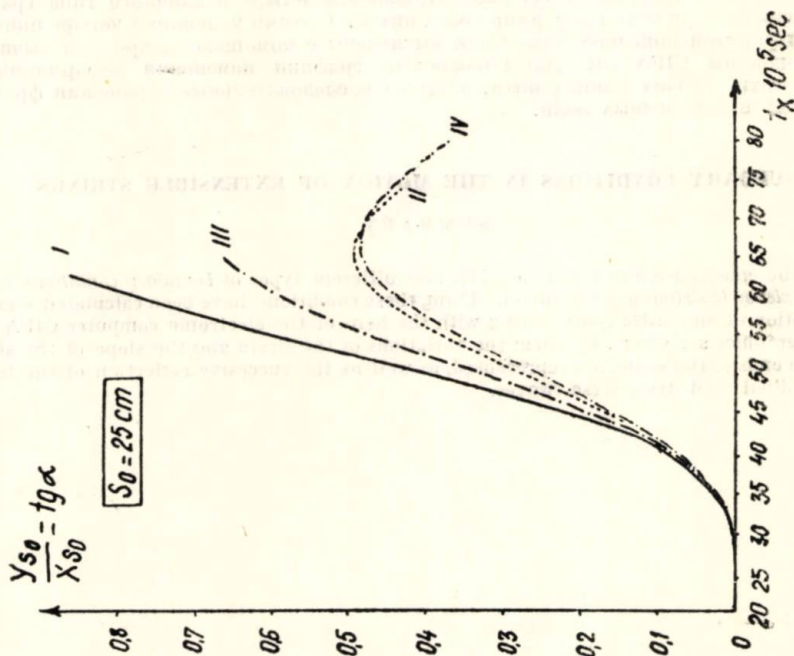


Fig. 4

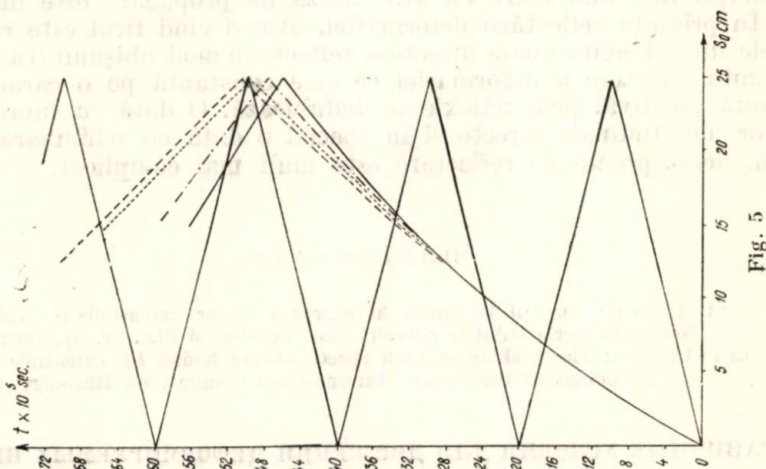


Fig. 5

că în cele patru cazuri considerate, depinzînd de mărimea deformației, viteza de propagare a unei transversale este diferită și variabilă. Cu cît deformația este mai mare cu atît viteza de propagare este mai mare.

În privința reflectării deformației, atunci cînd firul este rectiliniu, primele unde longitudinale directe se reflectă în mod obișnuit (ca la bare) : o anumită creștere a deformației ce este constantă pe o caracteristică de pantă pozitivă, prin reflexie se dedublează. O dată cu suprapunerea undelor longitudinale directe și în special o dată cu schimbarea pantei firului, acest proces de reflectare este mult mai complicat.

BIBLIOGRAFIE

- [1] N. Cristescu: Condiții la limită în mișcarea firelor extensibile I— Analele Univ. București, Seria științele naturii, Fasc. de Mat. și Fiz., nr. 34, 1962.
- [2] N. Cristescu: The braking of high speed moving bodies by extensible strings — Proceedings of the Fourth International Congress on Rheology (sub tipar)

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДВИЖЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ НИТЕЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В продолжении работы [1] рассматриваются четыре различного типа граничных условий для движения деформируемых нитей. С этими условиями четыре примера движения упругой конечной нити были вычислены с помощью электронной вычислительной машины CIFA 101. Даны различные графики изменения деформации и наклона нити в обоих концах нити, а также последовательные отражения фронтов продольных и поперечных волн.

BOUNDARY CONDITIONS IN THE MOTION OF EXTENSIBLE STRINGS

SUMMARY

In the continuation of the paper [1], four different types of *boundary conditions in the motion of extensible strings* are considered. Using these conditions, have been calculated 4 examples of motion of an elastic finite string with the help of the electronic computer CIFA 101. Different graphics are given; in them the variations of the strain and the slope of the string in the both ends of the string are represented, as well as the successive reflection of the fronts of longitudinal and transverse waves.



ECUAȚIILE CU DERIVATE PARȚIALE ALE MEDIILOR SFERICE ȘI CONSECINȚE DEDUSE DIN ELE

V. OLARU

Fie $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ o funcție integrabilă într-un domeniu oarecare Ω_n din spațiul euclidian cu n dimensiuni E_n . Fie $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ un punct oarecare din Ω_n și fie d distanța de la acest punct la frontiera lui Ω_n . După cum se știe, media sferică $M_r[f]$ a funcției $f(x)$ se definește prin relația

$$M_r[f] = \frac{1}{\bar{\omega}_n r^{n-1}} \int_{\Sigma_r^{x^0}} f(x) d\sigma_n \quad (1)$$

unde $\bar{\omega}_n$ este aria sferei unitate din E_n , $\Sigma_r^{x^0}$ este suprafața sferei de rază r , cu centrul în x^0 și cu elementul de arie $d\sigma_n$; r este un număr pozitiv arbitrar astfel încît $r < d$. Ținînd cont de relația cunoscută

$$d\sigma_n = r^{n-1} d\bar{\omega}_n \quad (2)$$

unde $d\bar{\omega}_n$ este elementul de arie al sferei unitate din E_n , relația (1) devine

$$M_r[f] = \frac{1}{\bar{\omega}_n} \int_{\Sigma_r^{x^0}} f(x^0 + r\alpha) d\bar{\omega}_n \quad (1')$$

cu $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ funcții de $n-1$ parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ astfel încît $|\alpha|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$.

Din relația (1') se constată imediat că media sferică depinde de variabilele $x_1^0, \dots, x_n^0$ și r și deci media sferică este un operator. Nota de față are drept scop să determine funcțiile și valorile proprii ale acestui operator. Pentru aceasta vom presupune că domeniul de definiție a acestui operator este mulțimea funcțiilor de clasă O^2 în domeniul Ω_n . Pentru ușurință, o astfel de funcție va fi numită funcție regulată.

Fie f o funcție regulată în domeniul Ω_n și să derivăm expresia (1') în raport cu r ; deoarece cantitățile $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pot servi drept cosinuși

directori ai versorului normalei exterioare la $\Sigma_r^{x^0}$ notat cu $\vec{n}$, vom putea scrie folosind (2)

$$\frac{\partial M_r[f]}{\partial r} = \frac{1}{\bar{\omega}_n} \int_{\Sigma_1^{x^0}} \text{grad } f \cdot \vec{n} d\bar{\omega}_n = \frac{1}{\bar{\omega}_n r^{n-1}} \int_{\Sigma_r^{x^0}} \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma_n$$

Aici $\frac{\partial f}{\partial n}$ înseamnă derivata funcției f în raport cu direcția normalei exterioare la $\Sigma_r^{x^0}$; în baza formulei flux-divergență

$$\int_{\Sigma_r^{x^0}} \frac{\partial f}{\partial n} d\sigma_n = \int_{\rho \leq r} \Delta f d\omega,$$

ultima relație se va putea scrie și sub forma

$$\frac{\partial M_r[f]}{\partial r} = \frac{1}{\bar{\omega}_n r^{n-1}} \int_{\rho \leq r} \Delta_n f d\omega \quad (3)$$

unde $d\omega$ este elementul de volum din interiorul sferei $\Sigma_r^{x^0}$ iar notația $\rho \leq r$ înseamnă că integrala se ia în interiorul sferei $\Sigma_r^{x^0}$. În baza relației bine cunoscute

$$d\omega = r^{n-1} dr d\bar{\omega}_n$$

egalitatea (3) se va scrie astfel :

$$\frac{\partial M_r[f]}{\partial r} = \frac{1}{\bar{\omega}_n r^{n-1}} \int_0^r \rho^{n-1} d\rho \int_{\Sigma_1^{x^0}} \Delta_n f(x^0 + \rho\alpha) d\bar{\omega}_n \quad (3')$$

Din această relație decurg câteva consecințe importante pentru media sferică. Astfel vom avea

$$\left. \frac{\partial M_r[f]}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 M_r[f]}{\partial r^2} \right|_{r=0} = \frac{1}{n} \Delta_n f \left(\Delta_n \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 M_r[f]}{\partial r^2} - \Delta_n M_r[f] + \frac{n-1}{r} \frac{\partial M_r[f]}{\partial r} = 0 \quad (6)$$

Relațiile (4) și (5) se deduc imediat din (3'), dar pentru scopul urmărit de noi este importantă relația (6) și de aceea o vom demonstra. Înmulțind relația (3') cu r^{n-1} și derivând în raport cu r , găsim :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial M_r[f]}{\partial r} \right) = \frac{1}{\bar{\omega}_n} r^{n-1} \int_{\Sigma_1^{x^0}} \Delta_n f(x^0 + r\alpha) d\bar{\omega}_n$$

Folosind acum permutabilitatea evidentă a integralei cu operatorul Δ_n găsim relația

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial M_r[f]}{\partial r} \right) = r^{n-1} \Delta_n M_r[f]$$

care coincide cu relația (6).

Relația (6) este de fapt o ecuație liniară cu derivate parțiale de ordinul II care are coeficienți singulari pe hiperplanul $r = 0$ din spațiul variabilelor $(r, x_1, \dots, x_n)$. Ecuația (6) este cunoscută sub numele de ecuația Euler-Poisson-Darboux a mediei sferice. Relațiile de mai sus împreună cu relația evidentă [care se deduce imediat din (1')].

$$M[f]|_{r=0} = f(x^0) \quad (7)$$

sînt cunoscute și se găsesc în bibliografia indicată la sfîrșitul lucrării.

A căuta funcțiile proprii ale operatorului $M_r[f]$ înseamnă a găsi funcțiile $f(x)$ neidentice nule care au proprietatea că se reproduc prin înmulțire cu un factor constant prin aplicarea operatorului M_r ; deci va trebui să avem verificată relația

$$M_r[f] = \lambda f, \quad f \not\equiv 0 \quad (8)$$

pentru funcțiile proprii ale operatorului M_r . Valorile λ care apar în (8) se numesc valori proprii; trebuie făcută observația că λ , în cazul operatorului M_r , considerat depinde de r și deci, relația (8) trebuie scrisă astfel:

$$M_r[f] = \lambda(r)f(x), \quad f(x) \not\equiv 0 \quad (8')$$

În plus, funcția $\lambda(r)$ trebuie determinată în așa fel încît să avem verificată relația (7); deci va trebui să avem

$$\lambda(0) = 1. \quad (9)$$

Limitîndu-ne la clasa funcțiilor regulate, se constată că relația (8') de definiție a funcțiilor și valorilor proprii echivalează cu separarea variabilelor r și x în ecuația Euler-Poisson-Darboux (6). Înlocuind deci (8') în ecuația (6), în baza metodei separării variabilelor, găsim că funcțiile proprii $f(x)$ trebuie să verifice ecuația cu derivate parțiale

$$\Delta_n f - \mu f = 0 \quad (10)$$

numită de obicei ecuația Laplace „amortizată” iar valorile proprii vor fi soluții ale ecuației diferențiale de ordinul II

$$\lambda'' + \frac{n-1}{r} \lambda' - \mu \lambda = 0 \quad (11)$$

care verifică relația (9). În ecuațiile (10) și (11) λ este un parametru real.

Ecuția (11) este o ecuație de tip Bessel a cărei singură soluție care verifică condiția (9) este funcția Bessel normată $P_{\frac{n-2}{2}}(r\sqrt{-\mu})$ unde

$$P_\nu(z) = \left(\frac{2}{z}\right)^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(z) \quad (12)$$

$J_\nu(z)$ fiind funcția Bessel de speța I,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}$$

Așa dar, pentru operatorul $M_r[f]$ definit pe mulțimea funcțiilor regulate în Ω_n , relația care definește funcțiile și valorile proprii va fi

$$M_r[t] = P_{\frac{n-2}{2}}(r\sqrt{-\mu}) f_\mu(x) \quad (13)$$

unde $f_\mu(x)$ sînt soluții neidentice nule ale ecuației (10), care depind evident de parametrul real μ .

Așa dar, relația (13) arată că operatorul „media sferică” posedă funcții și valori proprii dacă domeniul său de definiție este clasa funcțiilor regulate în Ω_n . În plus, atît funcțiile proprii, $f_\mu(x)$, cît și valorile proprii, $P_{\frac{n-2}{2}}(r\sqrt{-\mu})$, depind de un parametru real μ arbitrar; deci spectrul

punctual al operatorului M_r are puterea continuului. Trebuie făcută și observația că funcțiile proprii sînt nu numai funcții regulate ci și olomorfe în variabilele $x_1, \dots, x_n$ deoarece ecuația (10) este o ecuație de tip eliptic cu coeficienți olomorfi.

Restrîngînd domeniul de definiție al operatorului M_r , se modifică valorile proprii, spectrul acestui operator putînd deveni și discret; de exemplu, dacă impunem funcțiilor din domeniul de definiție al operatorului M_r să verifice condiția suplimentară,

$$f|_{\Gamma(\Omega_n)} = 0$$

atunci, după cum se știe, avem neapărat $-\mu > 0$ în ecuația (10) iar f nu va fi identic nul decît pentru o infinitate numărabilă de valori ale lui μ .

Relația (13) permite demonstrarea imediată a unei teoreme de medie pentru soluțiile ecuației (10); în adevăr, relația (13) spune că dacă f este o soluție oarecare a ecuației (10) atunci media ei sferică coincide cu valoarea acestei soluții în centrul sferei înmulțită cu funcția Bessel normată.

Această teoremă este cunoscută, dar demonstrația ei directă este destul de complicată; pentru $\mu = 0$, evident, se obține teorema clasică de medie a lui Gauss.

Se pot defini și alți operatori analogi operatorului $M_r[f]$ care au proprietăți asemănătoare acestuia. Astfel, fie $f(x_1, \dots, x_p)$ o funcție definită într-un domeniu T compact din E_p și de o clasă convenabilă în acest domeniu; fie acum spațiul E_n cu $n > p$ și să considerăm sferele

Σ_n^r $n - 1$ dimensionale din E_n ce nu ies din domeniul cilindric din E_n care se proiectează în domeniul T din E_p . Media sferică a funcției $f(x_1, \dots, x_p)$ pe sferele considerate, va avea expresia

$$M_r^n[f] = \frac{1}{\sigma_r} \int_{\Sigma_n^r} f(\xi_1, \dots, \xi_p) d\sigma_r. \quad (14)$$

cu $d\sigma_r = r^{n-1} d\bar{\omega}_n$ și $\sigma_r = r^{n-1} \bar{\omega}_n$. Deoarece în expresia (14) lipsesc variabilele $\xi_{p+1}, \dots, \xi_n$, aceasta se va putea modifica, dacă se va exprima $d\sigma_r$ doar prin elementul de volum din E_p . În adevăr, deoarece se știe că $d\sigma_r$ are expresia

$$d\sigma_r = \frac{r d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}}{\sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{n-1}^2}} \quad (15)$$

prin transformarea nesingulară

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1, \dots, \xi_p = \xi_p, \xi_{p+1} = \sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_p^2} y_1, \dots, \\ \xi_n &= \sqrt{r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_p^2} y_{n-p} \end{aligned}$$

se va obține expresia

$$\begin{aligned} d\sigma_r &= r (r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_p^2)^{\frac{n-p}{2}-1} d\xi_1 \dots d\xi_p \frac{dy_1 \dots dy_{n-p-1}}{\sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_{n-p-1}^2}} = \\ &= r (r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_p^2)^{\frac{n-p}{2}-1} d\xi_1 \dots d\xi_p d\bar{\omega}_{n-p} \end{aligned}$$

deoarece $d\bar{\omega}_{n-p} = \frac{dy_1 \dots dy_{n-p-1}}{\sqrt{1 - y_1^2 - \dots - y_{n-p-1}^2}}$, după cum rezultă din (15)

făcînd $r = 1$ și înlocuind n cu $n-p$. Așadar, în locul expresiei (14) se va putea scrie expresia echivalentă

$$M_r^n[f] = \frac{\bar{\omega}_{n-p}}{\bar{\omega}_n r^{n-2}} \int_{\Omega_p^r} (r^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_p^2)^{\frac{n-p}{2}-1} f(\xi_1, \dots, \xi_p) d\xi_1 \dots d\xi_p, \quad (16)$$

unde Ω_p^r este interiorul sferei de rază r din E_p ; dacă trecem la coordonate sferice în E_p notînd $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_p^2 = \rho^2$, vom avea $d\xi_1 \dots d\xi_p = \rho^{p-1} d\rho d\bar{\omega}_p$ iar în locul expresiei (16), vom obține expresia

$$M_r^n[f] = \frac{\bar{\omega}_{n-p}}{\bar{\omega}_n r^{n-2}} \int_0^r (r^2 - \rho^2)^{\frac{n-p}{2}-1} \rho^{p-1} d\rho \int_{\Sigma_p^1} f(x + \rho\alpha) d\bar{\omega}_p \quad (17)$$

sau, notînd $M_r^n[f] = \frac{1}{\bar{\omega}_p \int_{\Sigma_p^1} f(x + \rho\alpha) d\bar{\omega}_p$, $M_r^n[f]$ fiind media sferică în E_p a funcției f ,

$$(17) \quad M_r^n[f] = \frac{\bar{\omega}_{n-p} \bar{\omega}_p}{\bar{\omega}_n r^{n-2}} \int_0^r M_\rho^p[f] (r^2 - \rho^2)^{\frac{n-p}{2}-1} \rho^{p-1} d\rho. \quad (17')$$

Prin urmare, între media sferică a aceleiași funcții f considerată ca funcție în E_n sau în E_p există întotdeauna relația (17) sau (17'), dacă $n > p$.

În baza relațiilor (7), (4) și (5) rezultă imediat, din expresia (14), relațiile pe care le verifică operatorul $M_r^n[f]$ dacă $f(x) \in C^2(T)$; acestea vor fi:

$$M_r^n[f]|_{r=+0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial M_r^n[f]}{\partial r} \right|_{r=+0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 M_r^n[f]}{\partial r^2} \right|_{r=+0} = \frac{1}{n} \Delta_p f(x), \quad (18)$$

cu $\Delta_p \equiv \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, iar din ecuația (6) rezultă ecuația cu derivate parțiale pe care o verifică același operator:

$$\frac{\partial^2 M_r^n[f]}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial M_r^n[f]}{\partial r} - \Delta_p M_r^n[f] = 0 \quad (19)$$

În baza unicității soluției problemei Cauchy pentru ecuația (19), putem afirma că singura soluție de clasă C^2 în domeniul $T \times [0, \alpha]$, α fiind o constantă pozitivă arbitrară ($r \in [0, \alpha]$), a ecuației

$$\frac{\partial^2 u(r, x)}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r} \frac{\partial u(r, x)}{\partial r} - \Delta_p u(r, x) = 0 \quad (n > p), \quad (20)$$

care verifică condițiile

$$u(r, x)|_{r=+0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u(r, x)}{\partial r} \right|_{r=+0} = 0 \quad (21)$$

este funcția (14) dacă $f(x) \in C^2(T)$. Evident, în locul soluției (14) putem considera expresiile echivalente (17) sau (17'). Dacă $f(x) \in C^2(T)$, funcția (17) va fi o soluție generalizată, în sens Sobolev, a problemei Cauchy (21) pentru ecuația (20). (Din (17) este vizibil că dacă $f(x) \in C^0(T)$, atunci $M_r^n[f]$ este de clasă C^1 în variabila r). În adevăr, dacă considerăm un șir de polinoame $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$ care aproximează uniform în T funcția continuă $f(x)$, și dacă $u_m(r, x)$ este soluția problemei Cauchy

$$u(r, x)|_{r=+0} = P_m(x), \quad \left. \frac{\partial u(r, x)}{\partial r} \right|_{r=+0} = 0$$

pentru ecuația (20), deoarece $P_m(x) \in C^2(T)$, $u_m(r, x)$ va fi o soluție ordinară a ecuației considerate și va avea expresia

$$u_m(r, x) = \frac{\bar{\omega}_{n-p} \bar{\omega}_p}{\bar{\omega}_n r^{n-2}} \int_0^r M_p^p[P_m(x)] (r^2 - \rho^2)^{\frac{n-p}{2}} \rho^{p-1} d\rho.$$

Este ușor de văzut că șirul $\{u_m(r, x)\}_{m=0}^\infty$ este uniform convergent; în adevăr, din (14) rezultă imediat

$$|u_m(r, x) - u_{m'}(r, x)| \leq |P_m(x) - P_{m'}(x)|$$

Pe de altă parte, orice soluție ordinară a ecuației (20) este totodată și o soluție generalizată a acesteia, adică verifică relația

$$\int_D u_m(r, x) LV(r, x) dr dx = 0,$$

unde D este un subdomeniu oarecare din domeniul de definiție al soluției $u_m(r, x)$, $LV \equiv \frac{\partial^2 V(r, x)}{\partial r^2} + (1 - n) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{V(r, x)}{r} \right] - \Delta_p V(r, x)$ iar $V(r, x)$ este o funcție cu suport compact în D' . Trecînd la limită în ultima relație integrală, dacă notăm $w(r, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(r, x)$, vom găsi expresia

$$\int_D w(r, x) LV(r, x) dr dx = 0,$$

care arată că expresia (14) (sau expresiile echivalente (17) sau (17')) este o soluție generalizată a ecuației (20), deoarece este ușor de văzut că $w(r, x)$ coincide cu (14).

Evident, toate afirmațiile făcute acum sînt valabile și pentru media sferică $M_r[f]$ precum și pentru ecuația Darboux (6).

Rezultatele de mai sus pot fi aplicate pentru obținerea soluțiilor ecuațiilor de forma (20) sau de forma (6).

Să considerăm acum media sferică de volum a funcției f , care prin definiție va avea expresia

$$N_r^p[f] = \frac{1}{v_p(r)} \int_{\Omega_p^r} f(\xi) d\xi \quad (22)$$

unde Ω_p^r este interiorul sferei de rază r din E_p cu volumul $v_p(r)$, iar $d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_p = \rho^{p-1} d\rho d\bar{\omega}_p$ în coordonate sferice; se cunoaște relația $v_p(r) = r^p \cdot \frac{\bar{\omega}_p}{p}$; așa dar expresia (22) se va scrie, în coordonate sferice, sub forma

$$N_r^p[f] = \frac{p}{r^p \bar{\omega}_p} \int_0^r \rho^{p-1} d\rho \int_{\Sigma_p^1} f(x + \rho x) d\bar{\omega}_p = \frac{p}{r^p} \int_0^r M_p^p[f] \rho^{p-1} d\rho. \quad (22')$$

Comparînd ultima expresie pentru media sferică de volum obținută mai sus cu expresia (17'), rezultă imediat identitatea

$$N_r^p[f] = M_r^{p+2}[f], \quad (23)$$

care arată că media sferică de volum a unei funcții din E coincide cu media sferică superficială a aceleiași funcții dar considerată într-un spațiu cu două dimensiuni în plus.

Rezultă așa dar, că toate proprietăți mediei sferice de volum (22) se vor deduce din proprietățile mediei sferice (1), cu condiția să-l schimbăm pe n în $n + 2$. Prin urmare, se pot enunța următoarele rezultate:

Dacă funcția $f(x) \in C^2(T)$, $T \subset E_n$, atunci media sferică de volum $N_r^n[f]$ este o funcție de clasă C^2 în variabilele x și r care verifică condițiile

$$N_r^n[f]|_{r=+0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial N_r^n[f]}{\partial r} \right|_{r=+0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 N_r^n[f]}{\partial r^2} \right|_{r=+0} = \frac{1}{n-2} \Delta_n f(x)$$

și ecuația cu derivatele parțiale

$$\frac{\partial^2 N_r^n[f]}{\partial r^2} + \frac{n+1}{r} \frac{\partial N_r^n[f]}{\partial r} - \Delta_n N_r^n[f] = 0$$

Invers, orice soluție a ecuației precedente care verifică condițiile Cauchy

$$N_r^n[f]|_{r=+0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial N_r^n[f]}{\partial r} \right|_{r=+0} = 0,$$

coincide cu media sferică de volum (22).

Dacă considerăm media sferică de volum ca un operator ce acționează asupra mulțimii funcțiilor de clasă $C^2(T)$, atunci relația de definiție a funcțiilor și valorilor proprii va avea forma

$$N_r^n[f] = P_{\frac{n}{2}}(r\sqrt{-\mu})f(x),$$

în care funcția Bessel $P_{\frac{n}{2}}(r\sqrt{-\mu})$ a fost definită anterior iar $f_\mu(x)$ sînt ca și mai sus, soluții ale ecuației cu derivate parțiale (10).

Așa dar, atît pentru operatorul (1) cît și pentru operatorul (22) funcțiile proprii verifică aceeași ecuație cu derivate parțiale.

Relația (24) constituie totodată și o teoremă de medie pentru soluțiile ecuației (10): pentru orice soluție a ecuației (10), media sferică de volum a acestei funcții este egală cu valoarea acestei funcții în centrul sferei înmulțită cu funcția Bessel normată $P_{\frac{n}{2}}(r\sqrt{-\mu})$.

Menționăm că ipotezele impuse funcției f în cazul mediei sferice de volum pot fi lărgite; astfel, rezultatele anterioare valabile pentru media sferică de volum sînt valabile chiar dacă funcția $f(x)$ nu este de clasă C^2 ci de clasă C^1 .

BIBLIOGRAFIE

- [1] M. Nicolescu: Les fonctions polyharmoniques, Paris, Herman, 1936
- [2] M. Nicolescu: Sur les fonctions harmoniques d'ordre p . Bull. Soc. Math. France Soc. Math. France t. LIX, (1931)
- [3] M. Nicolescu: Sur les fonctions de n variables harmoniques d'ordre p . ibid. t. LX, (1932)
- [4] L. Argeisson: Über eine Mittelwertseigenschaft der Lösungen linear, partielle Differentialgleichungen 2. Ord. mit. konstanten koeffizienten, Math. Ann 113 (1935)
- [5] R. Courant, D. Hilbert: Methoden der math. Physik, Springer-Verlag Berlin, t. II.

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ И ИХ ПОСЛЕДСТВИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Устанавливаются некоторые свойства поверхности (I) и объема (22) сферических средних значений. Доказывается отношение (23), которое связывает поверхность сферических значений с объемом сферических средних значений; демонстрация основывается на тождестве (17'), которое связывает поверхностное сферическое среднее значение из E и с поверхностным сферическим средним значением из E_p ($p > 1$) той же функции от p переменных. Сферическое среднее значение (14) удовлетворяет уравнение (19) и условие (18) и наоборот. Получаются также собственные функции и собственные сферические средние значения (1) и (22): собственные функции даются решениями уравнений (10), а собственные значения являются Бесселевыми функциями. Отношения, которые дают эти собственные функции и собственные значения являются (13) для поверхностных сферических средних значений и (24) для сферических средних объема. Эти же отношения считаются и теоремы средних значений для решения уравнения (10).

LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DES MOYENNES SPHÉRIQUES ET SES CONSÉQUENCES

RÉSUMÉ

On établit quelques propriétés des moyennes sphériques superficielles (1) ou de volume (22). On démontre la relation (23) qui lie la moyenne sphérique de volume avec la moyenne sphérique superficielle; la démonstration est basée sur l'identité (17') qui lie la moyenne sphérique superficielle dans E_n avec la moyenne sphérique superficielle dans E_p ($n > p$) de la même fonction de p variables. Les moyennes sphériques (14) vérifient l'équation aux dérivées partielles (19) et les conditions (18) et réciproquement on obtient aussi les fonctions et les valeurs propres des moyennes sphériques (1) et (22): les fonctions propres sont données par les solutions de l'équation (10); les valeurs propres sont des fonctions de Bessel, les relations qui donnent ces fonctions et valeurs propres sont (13) pour la moyenne sphérique superficielle et (24) pour la moyenne sphérique de volume. Ces mêmes relations peuvent être considérées comme des théorèmes de moyenne pour les solutions des équations (10).

1. INTRODUCTION

The purpose of this study is to investigate the effects of the 1970-71 winter on the health and well-being of the population of the United Kingdom. The study is based on a survey of the general population, and the results are presented in this report.

2. THE 1970-71 WINTER AND THE HEALTH OF THE POPULATION

2.1. THE 1970-71 WINTER

2.1.1. THE 1970-71 WINTER

The 1970-71 winter was a particularly severe one in the United Kingdom. It was characterized by a long period of cold weather, with frequent frosts and snow. The weather was particularly bad in the north of the country, where there was a lot of snow and ice. This led to a lot of problems for the population, particularly in the north of the country. The weather was particularly bad in the north of the country, where there was a lot of snow and ice. This led to a lot of problems for the population, particularly in the north of the country.

2.2. THE HEALTH OF THE POPULATION

2.2.1. THE HEALTH OF THE POPULATION

The health of the population was affected by the 1970-71 winter. There was a lot of illness and death, particularly in the north of the country. The weather was particularly bad in the north of the country, where there was a lot of snow and ice. This led to a lot of problems for the population, particularly in the north of the country. The weather was particularly bad in the north of the country, where there was a lot of snow and ice. This led to a lot of problems for the population, particularly in the north of the country.

DESPRE FORMA LUI SANNIA

N. MIHĂILEANU

Este cunoscută teorema [1]: pentru ca două forme diferențiale pătratice

$$a_{11} du^2 + 2a_{12} du dv + a_{22} dv^2, \quad b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2$$

dintre care prima definită pozitiv și de curbura gaussiană 1, să fie forme fundamentale ale unei congruențe rectilinii este necesar și suficient să fie satisfăcută condiția

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{b_{221}}{a} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{b_{112}}{a} = \frac{2a_{12}b_{12} - a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11}}{a}$$

unde a^2 este discriminantul primei forme iar

$$b_{112} = \frac{\partial b_{11}}{\partial v} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u} - \binom{1}{12} b_{11} + [\binom{1}{11} - \binom{2}{12}] b_{12} + \binom{2}{11} b_{22}$$

$$b_{221} = \frac{\partial b_{22}}{\partial u} - \frac{\partial b_{12}}{\partial v} + \binom{2}{22} b_{11} + [\binom{2}{22} - \binom{1}{12}] b_{12} - \binom{2}{12} b_{22}$$

notînd în paranteze simbolurile Christoffel în coeficienți a_{ij} .

Condiția aceasta este datorită lui Sannia [3]. Forma a doua diferențială îi poartă numele.

Vom arăta că putem să scriem mai simplu această condiție, prin introducerea unei noi forme diferențiale lineare.

★

Considerăm o congruență de drepte în spațiul euclidian; determinăm o generatoare a congruenței prin punctul $M(u, v)$ și versorul direcției ei, $L(u, v)$.

Introducem formele

$$i = L \cdot dM = i du + j dv \quad (1)$$

$$\varphi' = dL^2 = e' du^2 + 2f' du dv + g' dv^2, \quad d'^2 = e' g' - f'^2 \quad (2)$$

$$\psi = -dM \cdot dL = l du^2 + (m + m') du dv + n dv^2 \quad (3)$$

Forma lui Sannia este

$$\Sigma = \frac{1}{d'^2} \frac{D(\varphi', \psi)}{D(du, dv)} = \frac{1}{d'^2} \begin{vmatrix} e' du + f' dv & f' du + g' dv \\ l du + m' dv & m du + n dv \end{vmatrix} \quad (4)$$

sau

$$\Sigma = \sigma_{11} du^2 + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) du dv + \sigma_{22} dv^2 \quad (5)$$

La o schimbare a originii și a alegerii punctului M pe generatoare

$$M^* = M + A + tL, \quad L^* = L \quad (6)$$

obținem

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{11}, \quad \sigma_{22}^* = \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}^* = \sigma_{12} - t, \quad \sigma_{21}^* = \sigma_{21} + t$$

deci forma Σ' este invariantă.

Raportăm vectorii spațiului la baza formată din vectorii L, L_u, L_v .
Punem

$$M_u = \alpha L_u + \beta L_v + \gamma L$$

cu coeficienții α, β, γ nedeterminați. Înmulțim scalar cu L_u, L_v, L ; analog pentru M_v . Obținem

$$M_u = -\sigma_{12} L_u + \sigma_{11} L_v + iL, \quad M_v = -\sigma_{22} L_u + \sigma_{21} L_v + jL \quad (7)$$

Punem de asemenea

$$L_{uu} = \alpha L_u + \beta L_v + \gamma L$$

obținem

$$\gamma = L \cdot L_{uu} = -L_u^2 = -e'$$

iar α, β sînt simboluri Christoffel ale formei φ' ; analog pentru celelalte derivate de ordinul doi ale vectorului L . Rezultă atunci din (7)

$$\begin{aligned} M_{uv} &= -\sigma_{12v} L_u + \sigma_{11v} L_v + iL_v + i_v L + \\ &- \sigma_{12} [({}_{12}^1) L_u + ({}_{12}^2) L_v - f' L] + \sigma_{11} [({}_{22}^1) L_u + ({}_{22}^2) L_v - g' L] \\ M_{vu} &= -\sigma_{22u} L_u + \sigma_{21u} L_v + jL_u + j_u L + \\ &- \sigma_{22} [({}_{11}^1) L_u + ({}_{11}^2) L_v - e' L] + \sigma_{21} [({}_{12}^1) L_u + ({}_{12}^2) L_v - f' L] \end{aligned}$$

Identificăm coeficienții în L_u, L_v ; obținem

$$\begin{aligned} i &= \sigma_{21u} - \sigma_{11v} - \sigma_{11} ({}_{22}^2) + (\sigma_{12} + \sigma_{21}) ({}_{12}^2) - \sigma_{22} ({}_{11}^2) \\ j &= -\sigma_{12u} + \sigma_{22u} + \sigma_{11} ({}_{22}^1) - (\sigma_{12} + \sigma_{21}) ({}_{12}^1) + \sigma_{22} ({}_{11}^1) \end{aligned} \quad (8)$$

identificăm și coeficientul în L

$$i_v - j_u = e' \sigma_{22} - f' (\sigma_{12} + \sigma_{21}) + g' \sigma_{11} \quad (9)$$

sau, ținînd seama de (5)

$$i_v - j_u = m - m' \quad (10)$$

Aceasta este condiția lui Sannia.

În adevăr, identificăm coeficienții e', f', g' cu a_{11}, a_{12}, a_{22} și pe σ_{ij} cu b_{ij} : a și ținem seama că

$$\frac{a_u}{a} = \binom{1}{11} + \binom{2}{12}, \quad \frac{a_v}{a} = \binom{1}{12} + \binom{2}{22}$$

atunci

$$b_{112} = -a_i, \quad b_{221} = a_j$$

însă i și j sînt introduși pe o cale mai naturală.

De altfel, relația (10) rezultă imediat din valorile

$$i = L \cdot M_u, \quad j = L \cdot M_v, \quad m = -L_u \cdot M_v, \quad m' = -L_v \cdot M_u$$

dacă $M_{uv} = M_{vu}$.

În cazul în care congruența este formată din normalele suprafeței s descrise de punctul $M(u, v)$ avem $i = j = 0$. De altfel forma lui Sannia este identică cu

$$\Sigma = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} e du + f dv & f du + g dv \\ l du + m dv & m du + n dv \end{vmatrix} = \frac{ds^2}{\sigma}$$

unde e, f, g sînt coeficienții primei forme fundamentale φ iar $1 : \sigma$, torsiunea geodezică. În acest caz forma apolară a formelor φ și Σ este nulă iar b_{112}, b_{221} sînt nule de asemenea. Forma Sannia satisface deci în cazul teoriei suprafețelor, relațiilor $b_{112} = 0, b_{221} = 0$ analoage relațiilor Codazzi.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Luigi Bianchi: Lezioni di Geometria differenziale. Bologna vol. I partea II, pag. 497. 1927
- [2] V. F. Kagan: Osnovi teorii poverhnostei. Moscova-Leningrad vol. II. 1948 pag. 265.
- [3] Gustavo Sannia: Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee. Annali di matematica. Milano. Serie III. tom. XV, 1908, pag. 145.

О ФОРМЕ САННИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Условие Саннии, чтобы две дифференциальные формы [2] и [5] определяли две конгруэнции прямых, равносильно с отношением [10] относительно к формам [1] и [3]

SUR LA FORME DE SANNIA

RÉSUMÉ

La condition de Sannia pour que deux formes différentielles (2) et (5) déterminent une congruence de droites est équivalente à la relation (10) relative aux formes (1) et (3).

In dieser Hinsicht ist die deutsche Sprache im Gymnasium zu betrachten.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

1.

2. $a \cdot d = b \cdot c$

3. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

4. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

5. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

6. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

7. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

8. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

9. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

10. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

DEUTSCHE SPRACHE IM GYMNASIUM

In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

DEUTSCHE SPRACHE IM GYMNASIUM

1. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

2. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

DEUTSCHE SPRACHE IM GYMNASIUM

1. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

2. In der deutschen Sprache ist die deutsche Sprache zu betrachten.

ASUPRA CALCULULUI OPTIMEI DE SPAȚIU ELASTIC SUPUSĂ ACȚIUNII UNOR SARCINI TANGENȚIALE

P. P. TEODORESCU

1. Problema determinării stării de tensiune și stării de deformare în interiorul unei optime de spațiu elastic a fost foarte puțin studiată pînă în prezent. Această problemă prezintă interes, deoarece putem obține astfel informații în legătură cu starea de solicitare locală în jurul unui colț cu trei fețe al unui solid elastic; dacă cele trei fețe nu sînt triortogonale, problema se poate studia analog, trecînd la un sistem de axe carteziane oblice.

S-au dat rezultate în special în cazul plan (stare de tensiune plană sau stare de deformare plană), pentru pana elastică finită și mai ales infinită¹.

Optimea de spațiu elastic $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ se obține aruncînd la infinit trei fețe adiacente ale unui paralelipiped elastic. Cazurile acțiunii unor sarcini periodice, a unor sarcini normale, precum și a unor forțe masice oarecare au fost considerate în [10]. În cele ce urmează vom considera acțiunea unor sarcini tangențiale, generalizînd astfel rezultatele date în [7], [8], [9] pentru sfertul de plan elastic.

Pentru rezolvarea problemei vom folosi formularea în tensiuni a problemei spațiale a teoriei elasticității, dată în [3], [4], [5]; această rezolvare în tensiuni este convenabilă pentru prima problemă fundamentală a teoriei elasticității (condiții în tensiuni pe contur), de care ne vom ocupa în cele ce urmează. Funcțiile de tensiune care dau soluția problemei fac parte dintr-o familie de astfel de funcții, corespunzînd domeniilor infinite obținute din paralelipipedul elastic prin aruncarea la infinit a uneia sau mai multe fețe ale sale, și au fost sugerate în [6].

¹ Pentru bibliografie în această direcție se pot consulta lucrările [8], [9].

2. Starea de tensiune tridimensională în interiorul unui corp elastic, omogen și izotrop, în absența forțelor masice, se poate exprima sub forma ¹

$$\sigma_x = \Delta F_x - \frac{3m}{2m+1} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3m}{2m+1} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (F_{xy} - F_{zx}) + \varphi_x, \quad (1')$$

starea de deformare fiind dată de

$$\begin{aligned} & \frac{mE}{1+m} [u - (-y\omega_z^0 + z\omega_y^0 + u_0)] = \\ & = \Delta \int \left(F_x - \frac{3m}{2m+1} F \right) dx - \frac{3m}{2m+1} \frac{\partial F}{\partial x} + 2\bar{F}_{yz} + f_{yz}, \end{aligned} \quad (2)$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală, $m \geq 2$ este numărul lui Poisson, corespunzând contracției transversale, funcțiile de tensiune $F_x(x, y, z)$, $F_y(x, y, z)$, $F_z(x, y, z)$ sînt funcții biarmonice

$$\Delta \Delta F_x = \Delta \Delta F_y = \Delta \Delta F_z = 0, \quad (3)$$

funcțiile $F_{yz} = F_{yz}(y, z)$, $F_{zx} = F_{zx}(z, x)$, $F_{xy} = F_{xy}(x, y)$, $\varphi_x = \varphi_x(x, y, z)$, $\varphi_y = \varphi_y(x, y, z)$, $\varphi_z = \varphi_z(x, y, z)$ sînt armonice

$$\Delta F_{yz} = \Delta F_{zx} = \Delta F_{xy} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta \varphi_x = \Delta \varphi_y = \Delta \varphi_z = 0, \quad (4')$$

funcțiile $\bar{F}_{yz} = \bar{F}_{yz}(y, z)$, $\bar{F}_{zx} = \bar{F}_{zx}(z, x)$, $\bar{F}_{xy} = \bar{F}_{xy}(x, y)$ sînt conjugatele armonice ale funcțiilor corespunzătoare de mai sus și unde s-a introdus notația

$$F = \frac{1}{3} (F_x + F_y + F_z). \quad (5)$$

Funcțiile φ_x , φ_y , φ_z trebuie să fie integrale particulare ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \Delta \left(F_x - \frac{3m}{2m+1} F \right). \quad (6)$$

Se pot alege ca integrale particulare funcțiile armonice

$$\varphi_x = \frac{3}{2(2m+1)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iint \Delta F \, dy \, dz + \frac{1}{2} \Delta \left(\int \frac{\partial F_y}{\partial z} \, dy + \int \frac{\partial F_z}{\partial y} \, dz \right), \quad (7)$$

avînd grijă ca funcțiile arbitrare care intervin datorită integrării nedefinite să fie determinate astfel ca sistemul (6) să se verifice. Aceste funcții

¹ Celelalte formule se obțin prin permutări circulare.

pot fi luate egale cu zero dacă se construiesc funcțiile F_x, F_y, F_z după formula lui E. Almansi [1], cu ajutorul a șase funcții armonice de forma

$$e^{\alpha x + \beta y + \gamma z} \quad (\alpha, \beta, \gamma = \text{const.}), \quad (8)$$

unde

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0. \quad (8')$$

Funcțiile $f_y = f_{yz}(y, z), f_z = f_{zx}(z, x), f_{xy} = f_{xy}(x, y)$ sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații cu variabile separate

$$\frac{\partial f_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial f_{zx}}{\partial z} = \frac{3}{2m+1} \left(\int \frac{\partial F}{\partial z} dy + \int \frac{\partial F}{\partial y} dz + \iint \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy dz \right) \quad (9)$$

iar constantele $u_0, v_0, w_0, \omega_x^0, \omega_y^0, \omega_z^0$ sînt deplasările, respectiv rotirile corpului considerat ca un rigid, fiind determinate prin condițiile de fixitate în spațiu. Funcțiile f_{yz}, f_{zx}, f_{xy} pot fi de asemenea luate egale cu zero în cazul funcțiilor armonice (8), (8').

Condițiile la limită se pun sub forma

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z), \quad (10)$$

unde (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}) este intensitatea încărcării pe elementul de frontieră de normală exterioară $\vec{n}$.

3. Fie optimea de spațiu elastic $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, acționată de sarcinile tangențiale

$$\begin{aligned} t_{xy}(y, z) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a'(\beta, \gamma) \cos \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma, \\ t_{xz}(y, z) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a''(\beta, \gamma) \sin \beta y \cos \gamma z d\beta d\gamma \end{aligned} \quad (11)$$

pe fețele $x = 0, y = 0, z = 0$. Se folosesc integrale duble Fourier, care pot reprezenta și funcții generalizate, astfel alese încît reprezentarea să fie antisimetrică în raport cu toate planele de coordonate.

Se pun condițiile la limită

$$x = 0 : \sigma_x = 0, \tau_{xy} = t_{xy}(y, z), \tau_{xz} = t_{xz}(y, z), \quad (12)$$

starea de tensiune trebuind să se anuleze pentru $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$.

Vom alege funcții de tensiune de forma ¹

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [A'_1(\beta, \gamma) + |\lambda| x A'_2(\beta, \gamma)] e^{-|\lambda|x} \sin \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\ &+ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [B'_1(\gamma, \alpha) + |\mu| y B'_2(\gamma, \alpha)] e^{-|\mu|y} \sin \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha + \\ &+ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [C'_1(\alpha, \beta) + |\nu| z C'_2(\alpha, \beta)] e^{-|\nu|z} \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (13)$$

¹ Vom considera aceste integrale în sensul utilizat în teoria regularizării transformatorilor Fourier, în teoria distribuțiilor [2].

unde s-a notat

$$|\lambda| = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \quad |\mu| = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}, \quad |\nu| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (14)$$

Luăm de asemenea

$$F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0. \quad (15)$$

Funcțiile integrabile $A'_i(\beta, \gamma)$, $B'_i(\gamma, \alpha)$, $C'_i(\alpha, \beta)$, $A''_i(\beta, \gamma)$, $\dots$, $C'''_i(\alpha, \beta)$ ($i=1, 2$), cu $(-\infty < \alpha, \beta, \gamma < \infty)$, trebuie să fie precizate prin condițiile la limită. Aceste funcții sînt considerate impare în raport cu variabilele α, β și γ . Condițiile la infinit sînt automat verificate, metoda de calcul utilizată corespunzînd la o transformată Fourier.

Folosind formulele (1), (1'), alegînd funcțiile $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ sub forma (7) și observînd că funcțiile de tensiune se construiesc cu ajutorul funcțiilor armonice (8), (8'), se pot calcula tensiunile normale

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\frac{1}{4(2m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \{mA_1 + 2[(1+m)A'_2 - m(A''_2 + A'''_2)] + \\ & + m|\lambda|xA_2\} e^{-|\lambda|x} \sin \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\ & + \frac{1}{4(2m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [m\alpha^2 B_1 - 2(2m+1)\mu^2 B'_2 + \\ & + m|\mu|y\alpha^2 B_2] e^{-|\mu|y} \sin \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha + \\ & + \frac{1}{4(2m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [m\alpha^2 C_1 - 2(2m+1)\nu^2 C'_2 + \\ & + m|\nu|z\alpha^2 C_2] e^{-|\nu|z} \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (16)$$

și tensiunile tangențiale

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = & -\frac{1}{4(2m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta\gamma} \{m\beta^2\gamma^2 A_1 + \lambda^4 A'_2 - \lambda^2[(2m\gamma^2 - \\ & - \beta^2)A'_2 + (2m\beta^2 - \gamma^2)A'''_2] + m|\lambda|x\beta^2\gamma^2 A_2\} e^{-|\lambda|x} \cos \beta y \cos \gamma z d\beta d\gamma + \\ & + \frac{1}{4(2m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mu|}{\gamma} \{m\gamma^2 B_1 - (m\gamma^2 - \alpha^2)B'_2 + \\ & + [(1+m)\gamma^2 + \alpha^2]B''_2 - [(3m+1)\gamma^2 + 2m\alpha^2]B'''_2 + \\ & + m|\mu|y^2 B_2\} e^{-|\mu|y} \cos \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha + \\ & + \frac{1}{4(2m+1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\nu|}{\beta} \{m\beta^2 C_1 - (m\beta^2 - \alpha^2)C'_2 - [(3m+1)\beta^2 + \\ & + 2m\alpha^2]C''_2 + [(1+m)\beta^2 + \alpha^2]C'''_2 + \\ & + m|\nu|z\beta^2 C_2\} e^{-|\nu|z} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (16')$$

unde s-a notat

$$A_i = A'_i + A''_i + A'''_i \quad (i = 1, 2); \quad (17)$$

de asemenea pentru B și C .

Punînd condițiile la limită pentru tensiunile normale și ținînd seama de expresiile (16), se obțin relațiile

$$mA_1 + 2[(1 + m)A'_2 - m(A''_2 + A'''_2)] = 0. \quad (18)$$

Eliminînd pe $A_1(\beta, \gamma)$, $B_1(\gamma, \alpha)$, $C_1(\alpha, \beta)$, cu ajutorul relațiilor (18), și introducînd notațiile

$$\begin{aligned} -\frac{m}{2m+1} \frac{A_2 \lambda^4}{\beta \gamma} &= A'(\beta, \gamma), \\ -\frac{m}{2m+1} \frac{B_2 \mu^4}{\gamma \alpha} &= B'(\gamma, \alpha), \\ -\frac{m}{2m+1} \frac{C_2 \nu^4}{\alpha \beta} &= C'(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{\beta \gamma} (\beta^2 A'''_2 - \gamma^2 A''_2) &= A''(\beta, \gamma), \\ \frac{\mu^2}{\gamma \alpha} (\gamma^2 B'_2 - \alpha^2 B'''_2) &= B''(\gamma, \alpha), \\ \frac{\nu^2}{\alpha \beta} (\alpha^2 C''_2 - \beta^2 C'_2) &= C''(\alpha, \beta), \end{aligned} \quad (19')$$

putem scrie componentele tensorului tensiune sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta \gamma}{\lambda^2} A'(\beta, \gamma) |\lambda| x e^{-|\lambda| x} \sin \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\ &+ \frac{1}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \alpha}{\mu^2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 [2(1+m) - m|\mu|y] B'(\gamma, \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - 2m B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} \sin \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha + \\ &+ \frac{1}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \beta}{\nu^2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^2 [2(1+m) - m|\nu|z] C'(\alpha, \beta) + \right. \\ &\quad \left. + 2m C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|\nu| z} \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A'(\beta, \gamma) \left[1 - \left(\frac{\beta \gamma}{\lambda^2} \right)^2 [2(1+m) - m|\lambda|x] \right] + \right. \\ &\quad \left. + m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A''(\beta, \gamma) \right\} e^{-|\lambda| x} \cos \beta y \cos \gamma z d\beta d\gamma + \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 (1 - |\mu| y) + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) + \right. \\
& \quad \left. + m B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu|y} \cos \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha + \\
& + \frac{1}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 (1 - |\nu| z) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) - \right. \\
& \quad \left. - m C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|\nu|z} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta.
\end{aligned} \tag{20'}$$

Se observă că, datorită factorilor $e^{-|\lambda|x}$, $e^{-|\mu|y}$, $e^{-|\nu|z}$, funcțiile $A'(\beta, \gamma)$, $A''(\beta, \gamma)$, ..., $C'(\alpha, \beta)$ se pot considera chiar local integrabile și mărginite pentru $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Relațiile

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-|\lambda|x}| dx &= \frac{2}{|\lambda|} = \text{finit}, \\
\int_{-\infty}^{\infty} |x e^{-|\lambda|x}| dx &= \frac{2}{\lambda^2} = \text{finit}
\end{aligned} \tag{21}$$

permit să reprezentăm funcțiile corespunzătoare, cu ajutorul integralelor Fourier, ca funcții impare de variabila x

$$\begin{aligned}
e^{-|\lambda|x} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\
x e^{-|\lambda|x} &= \frac{2}{\pi} |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}
\end{aligned} \tag{22}$$

sau ca funcții pare de această variabilă

$$\begin{aligned}
e^{-|\lambda|x} &= \frac{1}{\pi} |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}, \\
x e^{-|\lambda|x} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) \cos \alpha x d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}
\end{aligned} \tag{22'}$$

Ținând seama de (22), (22'), relațiile (20') ne dau

$$\begin{aligned}
4m \tau_{yz} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[A'(\beta, \gamma) \left[1 - 2(1+m) \left(\frac{\beta\gamma}{\lambda^2} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. + m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A''(\beta, \gamma) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \\
& + 2m \lambda^2 A'(\beta, \gamma) \left(\frac{\beta\gamma}{\lambda^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \cos \beta y \cos \gamma z d\beta d\gamma +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 (1 - |\mu| y) + \frac{y^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) + \right. \\
& \quad \left. + m B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} \cos \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) - \right. \\
& \quad \left. - m C''(\alpha, \beta) \right\} |\nu| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \gamma z \, d\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
& - m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 C'(\alpha, \beta) |\nu| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \cos \gamma z \, d\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \Big\} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta
\end{aligned} \tag{23}$$

sau

$$\begin{aligned}
4 m \tau_{yz} = & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A'(\beta, \gamma) \left[1 - 2(1 + m) \left(\frac{\beta \gamma}{\lambda^2} \right)^2 \right] + \right. \\
& + m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A''(\beta, \gamma) \Big\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x \, d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \\
& + 2 m \lambda^2 A'(\beta, \gamma) \left(\frac{\beta \gamma}{\lambda^2} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \sin \alpha x \, d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \Big\} \cos \beta y \cos \gamma z \, d\beta \, d\gamma + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) + \right. \\
& \quad \left. + m B''(\gamma, \alpha) \right\} |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \beta y \, d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
& - m \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 B'(\gamma, \alpha) |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \beta y \, d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \Big\} \cos \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 (1 - |\nu| z) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) - \right. \\
& \quad \left. - m C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|\nu| z} \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta.
\end{aligned} \tag{23'}$$

Inversînd ordinea de integrare (ceea ce se poate face, deoarece pentru $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ există o majorantă integrabilă dacă $A'(\beta, \gamma)$, $A''(\beta, \gamma), \dots$, $C'(\alpha, \beta)$ sînt numai funcții integrabile), obținem

$$\begin{aligned}
4 m \tau_{yz} = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 (1 - |\mu| y) + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + m B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} + \psi'(\gamma, \alpha; z, x) \right\} \cos \gamma z \sin \alpha x \, d\gamma \, d\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4m \tau_{xz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^2 (1 - |\nu| z) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|\nu| z} + \chi'(\alpha, \beta; x, y) \right\} \cos \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \\
4m \tau_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma}{|\lambda|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 (1 - |\lambda| x) + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} \right] A'(\beta, \gamma) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m A''(\beta, \gamma) \right\} e^{-|\lambda| x} + \varphi'(\beta, \gamma; y, z) \right\} \cos \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma
\end{aligned} \tag{24}$$

sau

$$\begin{aligned}
4m \tau_{yz} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 (1 - |\nu| z) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|\nu| z} + \chi''(\alpha, \beta; x, y) \right\} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta, \\
4m \tau_{zx} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{|\lambda|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 (1 - |\lambda| x) - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} \right] A'(\beta, \gamma) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m A''(\beta, \gamma) \right\} e^{-|\lambda| x} + \varphi''(\beta, \gamma; y, z) \right\} \sin \beta y \cos \gamma z d\beta d\gamma, \\
4m \tau_{xy} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\gamma}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 (1 - |\mu| y) - \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - m B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} + \psi''(\gamma, \alpha; z, x) \right\} \sin \gamma z \cos \alpha x d\gamma d\alpha,
\end{aligned} \tag{24'}$$

unde s-au precizat transformatele Fourier

$$\begin{aligned}
\varphi'(\beta, \gamma; y, z) &= \frac{1}{\pi} \left\{ \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C'(\alpha, \beta) \left[1 - 2(1+m) \left(\frac{\alpha\beta}{\nu^2} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} C''(\alpha, \beta) \right\} \frac{\cos \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \right. \\
&\quad + 2m\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha\beta}{\nu} \right)^2 C'(\alpha, \beta) \frac{\cos \alpha x d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 - \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) - \right. \\
&\quad \left. - m B''(\gamma, \alpha) \right\} |\mu| \frac{\cos \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
&\quad \left. - m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{|\mu|} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 B'(\gamma, \alpha) |\mu| \frac{(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2) \cos \alpha x d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \right\},
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\varphi''(\beta, \gamma; y, z) = & \frac{1}{\pi} \left\{ \beta \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ B'(\gamma, \alpha) \left[1 - 2(1+m) \left(\frac{\gamma \alpha}{\mu^2} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
& + m \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} B''(\gamma, \alpha) \left. \right\} \frac{\cos \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \\
& + 2m\beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\gamma \alpha}{\mu} \right)^2 B'(\gamma, \alpha) \frac{\cos \alpha x d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\beta, \gamma) + \right. \\
& + m C''(\beta, \gamma) \left. \right\} |\nu| \frac{\cos \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
& - m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{|\nu|} \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^2 C'(\alpha, \beta) |\nu| \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \cos \alpha x d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \left. \right\}, \quad (25')
\end{aligned}$$

$\psi'(\gamma, \alpha; z, x)$, $\psi''(\gamma, \alpha; z, x)$, $\chi'(\alpha, \beta; x, y)$ și $\chi''(\alpha, \beta; x, y)$ fiind obținute în mod analog; parametrii β, γ , respectiv γ, α și α, β s-au considerat fieși.

Fie un șir de funcții integrabile $A'_n(\beta, \gamma)$, respectiv $A''_n(\beta, \gamma), \dots$ $C''_n(\alpha, \beta)$, astfel că

$$|A'_n(\beta, \gamma)| < K, |A''_n(\beta, \gamma)| < K, \dots, |C''_n(\alpha, \beta)| < K \quad (26)$$

și

$$A'_n(\beta, \gamma) \rightarrow A'_0(\beta, \gamma), A''_n(\beta, \gamma) \rightarrow A''_0(\beta, \gamma), \dots, C''_n(\alpha, \beta) \rightarrow C''_0(\alpha, \beta). \quad (26')$$

Atunci este evident că

$$|A'_0(\beta, \gamma)| < K, |A''_0(\beta, \gamma)| < K, \dots, |C''_0(\alpha, \beta)| < K, \quad (26'')$$

deci funcțiile $A'_0(\beta, \gamma)$, $A''_0(\beta, \gamma), \dots, C''_0(\alpha, \beta)$ sînt funcții local integrabile.

Dacă $\varphi'_n(\beta, \gamma; y, z)$, $\varphi''_n(\beta, \gamma; y, z), \dots, \chi'_n(\alpha, \beta; x, y)$ sînt transformatele Fourier corespunzătoare la (26) și definite de relațiile (25), (25'), obținem

$$|\varphi'_n(\beta, \gamma; y, z)| < K, |\varphi''_n(\beta, \gamma; y, z)| < K, \dots, |\chi'_n(\alpha, \beta; x, y)| < K, \quad (27)$$

adică

$$\begin{aligned}
\varphi'_n(\beta, \gamma; y, z) & \rightarrow \varphi'_0(\beta, \gamma; y, z), \varphi''_n(\beta, \gamma; y, z) \rightarrow \varphi''_0(\beta, \gamma; y, z), \dots, \\
\chi'_n(\alpha, \beta; x, y) & \rightarrow \chi'_0(\alpha, \beta; x, y); \quad (27')
\end{aligned}$$

convergența este deci uniformă în raport cu y, z , respectiv z, x și x, y .

Fie $\tau_{yz}^n(x, y, z)$ expresia (20'), respectiv (24), (24'), pentru $A'_n(\beta, \gamma)$, $A''_n(\beta, \gamma), \dots, C''_n(\alpha, \beta)$. Folosind relația (20') se găsește o convergență uniformă a funcției $\tau_{yz}^n(x, y, z)$ (în sens normal) pentru $x > \Theta > 0$, $y > \Theta > 0$, $z > \Theta > 0$. Pentru $y = 0$, funcția $\tau_{yz}^n(x, 0, z)$ devine o funcție generalizată (în sensul teoriei distribuțiilor) și trebuie să considerăm con-

vergența într-un sens corespunzător; de asemenea, pentru $z = 0$ funcția $\tau_{yz}^n(x, y, 0)$ devine o funcție generalizată.

Aplicînd teoria transformatelor Fourier pentru funcțiile generalizate, se ajunge la concluzia că $\tau_{yz}^n(x, y, z)$, considerată ca funcție generalizată de variabilele z, x , respectiv x, y , converge către funcția $\tau_{yz}^0(x, y, z)$ în sensul funcțiilor generalizate, această convergență fiind uniformă în raport cu y , respectiv z . Mai mult, τ_{yz}^n este o funcție impară în raport cu x și pară în raport cu y, z . De asemenea, $\tau_{zx}^n(x, y, z)$, $\tau_{xy}^n(x, y, z)$ sînt funcții generalizate de variabilele x, y (sau y, z), convergența fiind uniformă în raport cu z (sau x), respectiv de variabilele y, z (sau z, x), convergența fiind uniformă în raport cu x (sau y).

În mod analog se arată că funcția $\sigma_x^n(x, y, z)$, considerată ca funcție generalizată de variabilele y, z , converge uniform în raport cu x către funcția $\sigma_x^0(x, y, z)$, în sensul funcțiilor generalizate; de asemenea pentru funcțiile $\sigma_y^n(x, y, z)$, $\sigma_z^n(x, y, z)$, considerate ca funcții generalizate. Mai mult, condițiile la limită (12) corespunzătoare sînt verificate.

Trecînd la limită în expresiile (24), (24') ale tensiunilor tangențiale se obține

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha}{|\mu|} \left[\frac{(1+m)\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} B'(\gamma, \alpha) + m B''(\gamma, \alpha) \right] + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{\pi} \left\{ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A'(\beta, \gamma) \left[1 - 2(1+m) \left(\frac{\beta\gamma}{\lambda^2} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A''(\beta, \gamma) \right\} \frac{d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \right. \\
 & \quad \left. + 2m\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta\gamma}{\lambda} \right)^2 A'(\beta, \gamma) \frac{d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \right. \quad (28) \\
 & \quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) - m C''(\alpha, \beta) \right\} \frac{|\nu| d\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
 & \quad - m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\nu|} \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 C'(\alpha, \beta) |\nu| \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) d\beta}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \Big\} \cos \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha = \\
 & \quad = m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b'(\gamma, \alpha) \cos \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha, \\
 & \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha}{|\nu|} \left[\frac{(1+m)\beta^2 - \alpha^2}{\nu^2} C'(\alpha, \beta) - m C''(\alpha, \beta) \right] + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{\pi} \left\{ \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A'(\beta, \gamma) \left[1 - 2(1+m) \left(\frac{\beta\gamma}{\lambda^2} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A''(\beta, \gamma) \right\} \frac{d\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 m \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta \gamma}{\lambda} \right)^2 A'(\beta, \gamma) \frac{d\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \\
& + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) + m B''(\gamma, \alpha) \right\} \frac{|\mu| d\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
& - m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\mu|} \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 B'(\gamma, \alpha) |\mu| \frac{(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2) d\gamma}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} \left\} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta = \\
& = m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c''(\alpha, \beta) \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta.
\end{aligned} \tag{28'}$$

Ținând seama de izomorfismul spațiului funcțiilor generalizate și al transformatelor lor Fourier, se ajunge la ecuațiile (celelalte se obțin prin permutări circulare)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m |\lambda|} \frac{(1+m) \beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A'(\beta, \gamma) + \frac{1}{|\lambda|} A''(\beta, \gamma) + \\
& + \frac{2}{\pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{\mu^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} - \\
& - \frac{1}{m \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma^2 - \alpha^2) B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{\mu^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B''(\gamma, \alpha) d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
& - \frac{2}{\pi} \beta^2 \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 C'(\alpha, \beta) d\alpha}{\nu^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \frac{1}{m \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C'(\alpha, \beta) d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \\
& - \frac{2}{m \pi} \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 C'(\alpha, \beta) d\alpha}{\nu^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - \beta^2) C''(\alpha, \beta) d\alpha}{\nu^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} = \\
& = \frac{a'(\beta, \gamma)}{|\gamma|},
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{m |\lambda|} \frac{(1+m) \gamma^2 - \beta^2}{\lambda^2} A'(\beta, \gamma) - \frac{1}{|\lambda|} A''(\beta, \gamma) - \\
& - \frac{2}{\pi} \beta^2 \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{\mu^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \\
& + \frac{1}{m \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \frac{2}{m \pi} \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{\mu^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma^2 - \alpha^2) B''(\gamma, \alpha) d\alpha}{\mu^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \frac{2}{\pi} \gamma^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2 C'(\alpha, \beta) d\alpha}{\nu^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \\
& + \frac{1}{m \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha^2 - \beta^2) C'(\alpha, \beta) d\alpha}{\nu^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C''(\alpha, \beta) d\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{a''(\beta, \gamma)}{|\beta|}.
\end{aligned} \tag{29'}$$

Dacă există un sistem de funcții simetrice mărginite $A'(\beta, \gamma)$, $A''(\beta, \gamma), \dots, C''(\alpha, \beta)$, care verifică sistemul de ecuații integrale (29), (29'), atunci starea de tensiune în interiorul optimei de spațiu elastic va fi dată de formulele (20), (20'); după cum am văzut mai sus, condițiile la limită sînt verificate în sensul convergenței uniforme a funcțiilor generalizate.

Se observă că sistemul omogen (29), (29') este independent de încărcarea optimei de spațiu elastic cu sarcini tangențiale, aceasta neintervenind decît în membrul al doilea.

În ceea ce va urma ne vom mărgini la clasa funcțiilor generalizate pare, mai precis la cazul în care $A'(\beta, \gamma), A''(\beta, \gamma), \dots, C''(\alpha, \beta)$ sînt funcții pare, mărginite, local integrabile. Ca și în cazul plan corespunzător [8] sau ca în cazul optimei de spațiu elastic acționată de sarcini normale pe planele de separație [10], sistemul de ecuații (29), (29') are o soluție unică în clasa funcțiilor generalizate.

4. Dacă funcțiile $a'(\beta, \gamma), a''(\beta, \gamma), \dots, c''(\alpha, \beta)$ sînt pare în raport cu variabila β și impare în raport cu variabila γ , respectiv în raport cu variabilele γ, α și α, β , sistemul (29), (29') ne arată că funcțiile $A'(\beta, \gamma), A''(\beta, \gamma), \dots, C''(\alpha, \beta)$ sînt pare în raport cu variabilele β, γ , respectiv γ, α și α, β .

Prin adunarea și scăderea ecuațiilor corespunzătoare din sistemul (29), (29') și ținînd seama de observația de mai sus, obținem sistemul echivalent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} A'(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \beta^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^4 B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \\ & + \frac{4}{m\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^4 B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 B''(\gamma, \alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \\ & + \frac{4}{\pi} \gamma^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^4 C'(\alpha, \beta) d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \frac{4}{m\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^4 C'(\alpha, \beta) d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 C''(\alpha, \beta) d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} + \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} A'(\beta, \gamma) + \frac{2}{|\lambda|} A''(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \beta^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + 2\gamma^2) B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} - \\ & - \frac{4}{m\pi} \gamma^4 \int_0^\infty \frac{B'(\gamma, \alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \frac{4}{\pi} \gamma^2 \int_0^\infty \frac{B''(\gamma, \alpha) d\alpha}{(\gamma^2 + \alpha^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \\ & - \frac{4}{\pi} \gamma^2 \int_0^\infty \frac{\alpha^2 (\alpha^2 + 2\beta^2) C'(\alpha, \beta) d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \frac{4}{m\pi} \beta^4 \int_0^\infty \frac{C'(\alpha, \beta) d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} - \\ & - \frac{4}{\pi} \beta^2 \int_0^\infty \frac{C''(\alpha, \beta) d\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} - \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}. \end{aligned} \quad (30')$$

Vom nota nucleele

$$K_1(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha^4 \beta^2}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} + \frac{1}{m} \frac{\alpha^4}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} \quad (31)$$

$$K_2(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha^2 \beta^2 (\alpha^2 + 2\gamma^2)}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2} - \frac{1}{m} \frac{\gamma^4}{(\gamma^2 + \alpha^2)^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)},$$

$$K_3(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha^2}{(\gamma^2 + \alpha^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}. \quad (31')$$

În acest caz sistemul de ecuații integrale se poate scrie sub forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} A'(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) B'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) B''(\gamma, \alpha) d\alpha + \frac{4}{m} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) C'(\alpha, \beta) d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) C''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} + \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}, \\ & \frac{1}{|\mu|} B'(\gamma, \alpha) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\beta, \gamma, \alpha) C'(\alpha, \beta) d\beta - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) C''(\alpha, \beta) d\beta + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\beta, \alpha, \gamma) A'(\beta, \gamma) d\beta + \quad (32) \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \alpha, \gamma) A''(\beta, \gamma) d\beta = \frac{b'(\gamma, \alpha)}{\alpha} + \frac{b''(\gamma, \alpha)}{\gamma}, \\ & \frac{1}{|\nu|} C'(\alpha, \beta) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\gamma, \alpha, \beta) A'(\beta, \gamma) d\gamma - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \alpha, \beta) A''(\beta, \gamma) d\gamma + \frac{4}{\pi} K_1(\gamma, \beta, \alpha) B'(\gamma, \alpha) d\gamma + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) B''(\gamma, \alpha) d\gamma = \frac{c'(\alpha, \beta)}{\beta} + \frac{c''(\alpha, \beta)}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} A'(\beta, \gamma) + \frac{2}{|\lambda|} A''(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) B'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) B''(\gamma, \alpha) d\alpha - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) C'(\alpha, \beta) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) C''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} - \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2+m}{m|\mu|} \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma^2 + \alpha^2} B'(\gamma, \alpha) + \frac{2}{|\mu|} B''(\gamma, \alpha) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\beta, \gamma, \alpha) C'(\alpha, \beta) d\beta - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) C''(\alpha, \beta) d\beta - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\beta, \alpha, \gamma) A'(\beta, \gamma) d\beta - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \alpha, \beta) A''(\beta, \gamma) d\beta = \frac{b'(\gamma, \alpha)}{\alpha} - \frac{b''(\gamma, \alpha)}{\gamma}, \end{aligned} \quad (32')$$

$$\begin{aligned} & \frac{2+m}{m|\nu|} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} C'(\alpha, \beta) + \frac{2}{|\nu|} C''(\alpha, \beta) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \alpha, \beta) A'(\beta, \gamma) d\gamma - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \alpha, \gamma) A''(\beta, \gamma) d\gamma - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \beta, \alpha) B'(\gamma, \alpha) d\gamma - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) B''(\gamma, \alpha) d\gamma = \frac{c'(\alpha, \beta)}{\beta} - \frac{c''(\alpha, \beta)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Se observă că acest sistem se bucură de anumite proprietăți de simetrie, care sugerează diferite simplificări de calcul, bazate pe proprietăți de ordin fizic și matematic.

Fie, de exemplu, cazul unei încărcări avînd o simetrie axială de ordinul al treilea în raport cu axa $x = y = z$; această simetrie poate să fie caracterizată prin relațiile

$$a'(\beta, \gamma) = b'(\beta, \gamma) = c'(\beta, \gamma), \quad (33)$$

$$a''(\beta, \gamma) = b''(\beta, \gamma) = c''(\beta, \gamma). \quad (33')$$

Ultimele două ecuații (32), (32') se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} B'(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) C'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) C''(\gamma, \alpha) d\alpha + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) A'(\alpha, \beta) d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) A''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{b'(\beta, \gamma)}{\gamma} + \frac{b''(\beta, \gamma)}{\beta}, \\ & \frac{1}{|\lambda|} C'(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) A'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) A''(\gamma, \alpha) d\alpha + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) B'(\alpha, \beta) d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) B''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{c'(\beta, \gamma)}{\gamma} + \frac{c''(\beta, \gamma)}{\beta}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} B'(\beta, \gamma) + \frac{2}{|\lambda|} B''(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) C'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) C''(\gamma, \alpha) d\alpha - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) A'(\alpha, \beta) d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) A''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{b'(\beta, \gamma)}{\gamma} - \frac{b''(\beta, \gamma)}{\beta},
\end{aligned} \tag{34'}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} C'(\beta, \gamma) + \frac{2}{|\lambda|} C''(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) A'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) A''(\gamma, \alpha) d\alpha - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) B'(\alpha, \beta) d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) B''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{c'(\beta, \gamma)}{\gamma} - \frac{c''(\beta, \gamma)}{\beta}.
\end{aligned}$$

Prin scăderea ecuațiilor (32), (32'), (34), (34') două câte două, ținând seama de (33), (33'), se obține sistemul (celelalte ecuații se pot scrie prin permutări circulare)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\lambda|} [B'(\beta, \gamma) - C'(\beta, \gamma)] + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) [C'(\gamma, \alpha) - A'(\gamma, \alpha)] d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) [C''(\gamma, \alpha) - A''(\gamma, \alpha)] d\alpha + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) [A'(\alpha, \beta) - B'(\alpha, \beta)] d\alpha + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) [A''(\alpha, \beta) - B''(\alpha, \beta)] d\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} [B'(\beta, \gamma) - C'(\beta, \gamma)] + \frac{2}{|\lambda|} [B''(\beta, \gamma) - C''(\beta, \gamma)] + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) [C'(\gamma, \alpha) - A'(\gamma, \alpha)] d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) [C''(\gamma, \alpha) - A''(\gamma, \alpha)] d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) [A'(\alpha, \beta) - B'(\alpha, \beta)] d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) [A''(\alpha, \beta) - B''(\alpha, \beta)] d\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{35'}$$

Ținând seama de unicitatea soluțiilor sistemului de ecuații (32), (32'), rezultă că sistemul omogen (35), (35') admite numai soluții banale. Rezultă deci că

$$A'(\beta, \gamma) = B'(\beta, \gamma) = C'(\beta, \gamma), \quad (36)$$

$$A''(\beta, \gamma) = B''(\beta, \gamma) = C''(\beta, \gamma) \quad (36')$$

iar sistemul (32), (32') se poate înlocui prin ecuațiile

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} A'(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) A'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) A''(\gamma, \alpha) d\alpha + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) A'(\alpha, \beta) d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) A''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} + \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}, \\ & \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} A'(\beta, \gamma) + \frac{2}{|\lambda|} A''(\beta, \gamma) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) A'(\gamma, \alpha) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) A''(\gamma, \alpha) d\alpha - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) A'(\alpha, \beta) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) A''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} - \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}. \end{aligned} \quad (37)$$

Fie acum un caz de încărcare simetric în raport cu planul bisector $x = y$; această proprietate este caracterizată prin relațiile

$$a'(\beta, \gamma) = b''(\gamma, \beta), \quad a''(\beta, \gamma) = b'(\gamma, \beta), \quad (38)$$

$$c'(\alpha, \beta) = c''(\beta, \alpha). \quad (38')$$

După schimbarea variabilelor în mod convenabil, prin scăderea ecuațiilor (32), (32') și ținând seama de (38), (38'), putem scrie sistemul

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} [A'(\beta, \gamma) - B'(\gamma, \beta)] - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) [A'(\alpha, \gamma) - B'(\gamma, \alpha)] d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) [A''(\beta, \gamma) + B''(\gamma, \beta)] d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) [C'(\alpha, \beta) - C'(\beta, \alpha)] d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) [C''(\alpha, \beta) + C''(\beta, \alpha)] d\alpha = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{|\nu|} [C'(\alpha, \beta) - C'(\beta, \alpha)] + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\gamma, \alpha, \beta) [A'(\beta, \gamma) - B'(\gamma, \beta)] d\gamma - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \alpha, \beta) [A''(\beta, \gamma) + B''(\gamma, \beta)] d\gamma - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\gamma, \beta, \alpha) [A'(\alpha, \gamma) - B'(\gamma, \alpha)] d\gamma + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) [A''(\alpha, \gamma) + B''(\gamma, \alpha)] d\gamma = 0, \\
& \frac{2+m}{m|\nu|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} [A'(\beta, \gamma) - B'(\gamma, \beta)] + \\
& + \frac{2}{|\lambda|} [A''(\beta, \gamma) + B''(\gamma, \beta)] - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) [A'(\alpha, \gamma) - B'(\gamma, \alpha)] d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) [A''(\alpha, \gamma) + B''(\gamma, \alpha)] d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) [C'(\alpha, \beta) - C'(\beta, \alpha)] d\alpha - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) [C''(\alpha, \beta) + C''(\beta, \alpha)] d\alpha = 0, \\
& \frac{2+m}{m|\nu|} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} [C'(\alpha, \beta) - C'(\beta, \alpha)] + \\
& + \frac{2}{|\nu|} [C''(\alpha, \beta) + C''(\beta, \alpha)] + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \alpha, \beta) [A'(\beta, \gamma) - B'(\gamma, \beta)] d\gamma - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \alpha, \gamma) [A''(\beta, \gamma) + B''(\gamma, \beta)] d\gamma + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \beta, \alpha) [A'(\alpha, \gamma) - B'(\gamma, \alpha)] d\gamma - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) [A''(\alpha, \gamma) + B''(\gamma, \alpha)] d\gamma = 0,
\end{aligned} \tag{39'}$$

care ne conduce la

$$A'(\beta, \gamma) = B'(\gamma, \beta), \quad A''(\beta, \gamma) = -B''(\gamma, \beta), \quad (40)$$

$$C'(\alpha, \beta) = C'(\beta, \alpha), \quad C''(\alpha, \beta) = -C''(\beta, \alpha). \quad (40')$$

Acest rezultat este consecința matematică a unor anumite proprietăți de ordin mecanic; se observă astfel că pentru un element din planul bisector $x = y$ putem scrie

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tau_{xy}, \quad (41)$$

$$\tau_{\parallel z} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\tau_{yz} - \tau_{zx}), \quad (41')$$

$$\tau_{\perp z} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y),$$

unde s-au pus în evidență tensiunile tangențiale paralele cu axa Oz și tensiunile tangențiale normale la această axă. Aceste tensiuni tangențiale sînt de forma

$$\begin{aligned} \tau_{\parallel z} = & \frac{\sqrt{2}}{8m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left\{ A'(\beta, \gamma) \left\{ 1 - \left(\frac{\beta\gamma}{\lambda^2} \right)^2 [2(1+m) - m|\lambda|x] \right\} + \right. \right. \\ & + m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A''(\beta, \gamma) \left\} e^{-|\lambda|x} \cos \beta y - \left\{ B'(\gamma, \beta) \left\{ 1 - \left(\frac{\beta\gamma}{\lambda^2} \right)^2 [2(1+m) - \right. \right. \\ & \left. \left. - m|\lambda|y] \right\} - m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} B''(\gamma, \beta) \left\} e^{-|\lambda|y} \cos \beta x \right\} \cos \gamma z d\beta d\gamma - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{8m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta}{|\lambda|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 (1 - |\lambda|x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} \right] A'(\beta, \gamma) - m A''(\beta, \gamma) \right\} e^{-|\lambda|x} \sin \beta y - \\ & - \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 (1 - |\lambda|y) - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} \right] B'(\gamma, \beta) + \right. \\ & \left. + m B''(\gamma, \beta) \right\} e^{-|\lambda|y} \sin \beta x \left\} \cos \gamma z d\beta d\gamma + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{8m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 (1 - |\nu|z) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) - m C''(\alpha, \beta) \right\} \sin \alpha x \cos \beta y - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 (1 - |\nu|z) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\beta, \alpha) + \right. \\
& \quad \left. + m C''(\beta, \alpha) \right\} \cos \beta x \sin \alpha y \Big\} e^{-|\nu|z} d\alpha d\beta, \\
\tau_{1z} = & - \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta \gamma}{\lambda^2} [A'(\beta, \gamma) |\lambda| x e^{-|\lambda|x} \sin \beta y - \\
& - B'(\gamma, \beta) |\lambda| y e^{-|\lambda|y} \sin \beta x] \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\
& \pm \frac{1}{8m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta \gamma}{\lambda^2} \left\{ \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 [2(1+m) - m|\lambda|x] A'(\beta, \gamma) + \right. \\
& \quad \left. + 2m A''(\beta, \gamma) \right\} e^{-|\lambda|x} \sin \beta y - \left\{ \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 [2(1+m) - \right. \\
& \quad \left. - m|\lambda|y] B'(\gamma, \beta) - 2m B''(\gamma, \beta) \right\} e^{-|\lambda|y} \sin \beta x \Big\} \sin \gamma z d\beta d\gamma - \\
& - \frac{1}{8m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \beta}{\nu^2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^2 [2(1+m) - m|\nu|z] C'(\alpha, \beta) + \right. \\
& \quad \left. + 2m C''(\alpha, \beta) \right\} \sin \alpha x \sin \beta y - \left\{ \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^2 [2(1+m) - \right. \\
& \quad \left. - m|\nu|z] C'(\beta, \alpha) - 2m C''(\beta, \alpha) \right\} \sin \beta x \sin \alpha y \Big\} e^{-|\nu|z} d\alpha d\beta.
\end{aligned} \tag{42}$$

Aceste tensiuni tangențiale trebuie să se anuleze pentru o încărcare simetrică ($x = y$); condițiile respective ne conduc numai la relațiile (40), (40').

În particular, dacă planul bisector $y = z$ este de asemenea plan de simetrie pentru încărcare, adică dacă avem de asemenea

$$b'(\gamma, \alpha) = c''(\alpha, \gamma), \quad b''(\gamma, \alpha) = c'(\alpha, \gamma), \tag{43}$$

$$a'(\beta, \gamma) = a''(\gamma, \beta), \tag{43'}$$

rezultă că și al treilea plan bisector $z = x$ este plan de simetrie pentru încărcare; într-adevăr, rezultă relațiile

$$c'(\alpha, \beta) = a''(\beta, \alpha), \quad c''(\alpha, \beta) = a'(\beta, \alpha), \tag{44}$$

$$b'(\gamma, \alpha) = b''(\alpha, \gamma) \tag{44'}$$

iar axa $x = y = z$ este o axă de simetrie de ordinul al treilea; noi am considerat mai sus un caz mai general: cazul unei încărcări cu o axă de simetrie, pentru care planele bisectoare nu sînt plane de simetrie.

Pentru un caz de încărcare antisimetric în raport cu planul bisector $x = y$ avem relațiile

$$a'(\beta, \gamma) = -b''(\gamma, \beta), \quad a''(\beta, \gamma) = -b'(\gamma, \beta), \quad (45)$$

$$c'(\alpha, \beta) = -c''(\beta, \alpha). \quad (45')$$

Ținând seama de (45), (45'), ecuațiile (32), (32') ne permit să scriem sistemul

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} [A'(\beta, \gamma) + B'(\gamma, \beta)] + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) [A'(\alpha, \gamma) + B'(\gamma, \alpha)] d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) [A''(\alpha, \gamma) - B''(\gamma, \alpha)] d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) [C'(\alpha, \beta) + C'(\beta, \alpha)] d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) [C''(\alpha, \beta) - C''(\beta, \alpha)] d\alpha = 0, \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\nu|} [C'(\alpha, \beta) + C'(\beta, \alpha)] + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\gamma, \alpha, \beta) [A'(\beta, \gamma) + B'(\gamma, \beta)] d\gamma - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \alpha, \beta) [A''(\beta, \gamma) - B''(\gamma, \beta)] d\gamma + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\gamma, \beta, \alpha) [A'(\alpha, \gamma) + B'(\gamma, \alpha)] d\gamma - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) [A''(\alpha, \gamma) - B''(\gamma, \alpha)] d\gamma = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} [A'(\beta, \gamma) + B'(\gamma, \beta)] + \frac{2}{|\lambda|} [A''(\beta, \gamma) - B''(\gamma, \beta)] + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) [A'(\alpha, \gamma) + B'(\gamma, \alpha)] d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) [A''(\alpha, \gamma) - B''(\gamma, \alpha)] d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) [C'(\alpha, \beta) + C'(\beta, \alpha)] d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) [C''(\alpha, \beta) - C''(\beta, \alpha)] d\alpha = 0, \end{aligned} \quad (46')$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2+m}{m|\nu|} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} [C'(\alpha, \beta) + C'(\beta, \alpha)] + \frac{2}{|\nu|} [C''(\alpha, \beta) - C''(\beta, \alpha)] + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \alpha, \beta) [A'(\beta, \gamma) + B'(\gamma, \beta)] d\gamma - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \alpha, \gamma) [A''(\beta, \gamma) + B''(\gamma, \beta)] d\gamma - \\
& - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \beta, \alpha) [A'(\alpha, \gamma) + B'(\gamma, \alpha)] d\gamma + \\
& + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) [A''(\alpha, \gamma) - B''(\gamma, \alpha)] d\gamma = 0,
\end{aligned}$$

care ne conduce la

$$A'(\beta, \gamma) = -B'(\gamma, \beta), \quad A''(\beta, \gamma) = B''(\gamma, \beta), \quad (47)$$

$$C'(\alpha, \beta) = -C'(\beta, \alpha), \quad C''(\alpha, \beta) = C''(\beta, \alpha). \quad (47')$$

Tensiunea normală (41) pe planul bisector $x = y$ este de forma

$$\begin{aligned}
\sigma = & \frac{1}{8m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta\gamma}{\lambda^2} \left\{ \left[2(1+m) \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 + m \left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 |\lambda| x \right] A'(\beta, \gamma) + \right. \\
& + 2m A''(\beta, \gamma) \Big\} e^{-|\lambda|x} \sin \beta y + \left\{ \left[2(1+m) \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 + \right. \right. \\
& + m \left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 |\lambda| y \Big] B'(\gamma, \beta) - 2m B''(\gamma, \beta) \Big\} e^{-|\lambda|y} \sin \beta x \Big\} \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\
& + \frac{1}{16m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha\beta}{\nu^2} [2(1+m) - m|\nu|z] [C'(\alpha, \beta) \sin \alpha x \sin \beta y + \\
& + C'(\beta, \alpha) \sin \beta x \sin \alpha y] e^{-|\nu|z} d\alpha d\beta - \\
& - \frac{1}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{|\lambda|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 (1 - |\lambda|x) + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} \right] A'(\beta, \gamma) + \right. \\
& + m A''(\beta, \gamma) \Big\} e^{-|\lambda|x} \cos \beta y + \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 (1 - |\lambda|y) + \right. \right. \\
& + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} \Big] B'(\gamma, \beta) - m B''(\gamma, \beta) \Big\} e^{-|\lambda|y} \cos \beta x \Big\} \sin \gamma z d\beta d\gamma - \\
& - \frac{1}{8m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ C'(\alpha, \beta) \left[1 - \left(\frac{\alpha\beta}{\nu^2} \right)^2 [2(1+m) - m|\nu|z] \right] + \right. \\
& + m \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} C''(\alpha, \beta) \Big\} \cos \alpha x \cos \beta y + \left\{ C'(\beta, \alpha) \left[1 - \left(\frac{\alpha\beta}{\nu^2} \right)^2 [2(1+m) - \right. \right. \\
& - m|\nu|z] \Big\} - m \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} C''(\beta, \alpha) \Big\} \cos \beta x \cos \alpha y \Big\} e^{-|\nu|z} d\alpha d\beta.
\end{aligned} \quad (48)$$

Anulind această tensiune pentru o încărcare antisimetrică ($x = y$) se obțin relațiile (47), (47').

În particular, dacă planul bisector $y = z$ este de asemenea plan de antisimetrie pentru încărcare, adică dacă avem de asemenea

$$b'(\gamma, \alpha) = -c''(\alpha, \gamma), \quad b''(\gamma, \alpha) = -c'(\alpha, \gamma), \quad (49)$$

$$a'(\beta, \gamma) = -a''(\gamma, \beta), \quad (49')$$

rezultă că al treilea plan bisector $z = x$ este de asemenea plan de antisimetrie pentru încărcare; vom avea relațiile

$$c'(\alpha, \beta) = -a''(\beta, \alpha), \quad c''(\alpha, \beta) = -a'(\beta, \alpha), \quad (50)$$

$$b'(\gamma, \alpha) = -b''(\alpha, \gamma) \quad (50')$$

iar axa $x = y = z$ este o axă de simetrie de ordinul al treilea; acest caz este deci conținut în cazul mai general considerat mai sus.

Dacă, în cazul unei axe de simetrie de ordinul al treilea $x = y = z$, descompunem cazul de încărcare după proprietățile de simetrie și antisimetrie în raport cu planele bisectoare $x = y$, $y = z$, $z = x$, putem înlocui ecuațiile (37), (37') prin ecuațiile

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} A'(\beta, \gamma) \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) A'(\alpha, \gamma) d\alpha \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) A''(\alpha, \gamma) d\alpha \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) A'(\beta, \alpha) d\alpha \mp \\ & \mp \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) A''(\beta, \alpha) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} \pm \frac{a'(\gamma, \beta)}{\beta}, \\ & \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} A'(\beta, \gamma) + \frac{2}{|\lambda|} A''(\beta, \gamma) \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) A'(\alpha, \gamma) d\alpha \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) A''(\alpha, \gamma) d\alpha \mp \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) A'(\beta, \alpha) d\alpha \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) A''(\beta, \alpha) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} \mp \frac{a'(\gamma, \beta)}{\beta}, \end{aligned} \quad (51')$$

semnele superioare corespunzând la cazul simetric iar semnele inferioare la cazul antisimetric.

În general, un caz de încărcare oarecare se poate decompune în două cazuri de încărcare după proprietățile de simetrie și antisimetrie în raport cu planul $x = y$; am considerat aceste două cazuri mai sus. Folosind relațiile (40), (40'), (47), (47'), găsite mai sus, putem înlocui

sistemul de ecuații (32), (32') prin două subsisteme, avînd fiecare cîte patru ecuații integrale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\lambda|} A'(\beta, \gamma) \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \beta, \gamma) A'(\alpha, \gamma) d\alpha \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) A''(\alpha, \gamma) d\alpha + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\alpha, \gamma, \beta) C'(\alpha, \beta) d\alpha + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \gamma, \beta) C''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} + \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\nu|} C'(\alpha, \beta) + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\gamma, \alpha, \beta) A'(\beta, \gamma) d\gamma - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \alpha, \beta) A''(\beta, \gamma) d\gamma \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_1(\gamma, \beta, \alpha) A'(\alpha, \gamma) d\gamma \mp \\ & \mp \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) A''(\alpha, \gamma) d\gamma = \frac{c'(\alpha, \beta)}{\beta} + \frac{c''(\alpha, \beta)}{\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2+m}{m|\lambda|} \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} A'(\beta, \gamma) + \frac{2}{|\lambda|} A''(\beta, \gamma) \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \beta, \gamma) A'(\alpha, \gamma) d\alpha \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\gamma, \beta, \alpha) A''(\alpha, \gamma) d\alpha - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\alpha, \gamma, \beta) C'(\alpha, \beta) d\alpha - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \gamma, \alpha) C''(\alpha, \beta) d\alpha = \frac{a'(\beta, \gamma)}{\gamma} - \frac{a''(\beta, \gamma)}{\beta}, \end{aligned} \quad (52')$$

$$\begin{aligned} & \frac{2+m}{m|\nu|} \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} C'(\alpha, \beta) + \frac{2}{|\nu|} C''(\alpha, \beta) + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \alpha, \beta) A'(\beta, \gamma) d\gamma - \\ & - \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\beta, \alpha, \gamma) A''(\beta, \gamma) d\gamma \mp \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_2(\gamma, \beta, \alpha) A'(\alpha, \gamma) d\gamma \pm \\ & \pm \frac{4}{\pi} \int_0^\infty K_3(\alpha, \beta, \gamma) A''(\alpha, \gamma) d\gamma = \frac{c'(\alpha, \beta)}{\beta} - \frac{c''(\alpha, \beta)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Sistemul cu semnele superioare corespunde la cazul de încărcare simetric iar cel cu semnele inferioare corespunde la cazul de încărcare antisimetric. Cu toate că avem de integrat două sisteme de ecuații integrale în acest fel, acest procedeu prezintă avantajul că fiecare sistem

are numai patru ecuații, de o formă care nu este mai dificilă decât cea a ecuațiilor (32), (32').

În cazul unei simetrii totale (simetrie în raport cu toate planele bisectoare) sau în cazul unei antisimetrii totale (antisimetrie în raport cu aceste plane) sistemele (52), (52') se reduc la sistemele (51), (51').

Ecuațiile (52), (52') permit să exprimăm pe $C'(\alpha, \beta)$ și $C''(\alpha, \beta)$ în raport cu $A'(\beta, \gamma)$, $A''(\beta, \gamma)$ și să reducem problema generală la integrarea numai a două sisteme cu câte două ecuații integrale fiecare. Aceste ecuații se pot integra prin aproximații succesive, la fel ca în cazul optimei de spațiu elastic acționată de sarcini normale [10] sau ca în cazul plan corespunzător [8].

5. Odată funcțiile $A'(\beta, \gamma)$, $A''(\beta, \gamma)$, ..., $C''(\alpha, \beta)$ determinate, prin ecuațiile integrale stabilite, starea de tensiune în interiorul optimei de spațiu elastic, acționată de sarcinile tangențiale (11), va fi dată de

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta \gamma}{\lambda^2} A'(\beta, \gamma) |\lambda| \lambda x e^{-|\lambda| x} \sin \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\ & + \frac{1}{m} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma \alpha}{\mu^2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 [2(1+m) - m|\mu| y] B'(\gamma, \alpha) - \right. \\ & \left. - 2m B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} \sin \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha + \\ & + \frac{1}{m} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \beta}{\nu^2} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\nu} \right)^2 [2(1+m) - m|\nu| z] C'(\alpha, \beta) + \right. \\ & \left. + 2m C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|\nu| z} \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{1}{m} \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ A'(\beta, \gamma) \left[1 - \left(\frac{\beta \gamma}{\lambda^2} \right)^2 [2(1+m) - m|\lambda| x] \right] + \right. \\ & + m \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\lambda^2} A''(\beta, \gamma) \left. \right\} e^{-|\lambda| x} \cos \beta y \cos \gamma z d\beta d\gamma + \\ & + \frac{1}{m} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{|\mu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 (1 - |\mu| y) + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\mu^2} \right] B'(\gamma, \alpha) + \right. \\ & \left. + m B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} \cos \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha + \\ & + \frac{1}{m} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{|\nu|} \left\{ \left[m \left(\frac{\beta}{\nu} \right)^2 (1 - |\nu| z) - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\nu^2} \right] C'(\alpha, \beta) - \right. \\ & \left. - m C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|\nu| z} \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (53')$$

Folosind formulele (2), în care anulăm funcțiile F_{yz} , F_{zx} , F_{xy} , f_{yz} , f_{zx} , f_{xy} , găsim starea de deformare sub forma

$$\begin{aligned} & \frac{m E}{1+m} [u - (-y \omega_z^0 + z \omega_y^0 + u_0)] = \\ & = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta \gamma}{|\lambda| \lambda^2} A'(\beta, \gamma) \left(1 - \frac{2}{m} + |\lambda| x\right) e^{-|\lambda| x} \sin \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\mu^2} \left\{ \left[\frac{2}{m} \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 (2 - |\mu| y) \right] B'(\gamma, \alpha) + \right. \\ & \left. + 2 B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} \sin \gamma z \cos \alpha x d\gamma d\alpha + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{v^2} \left\{ \left[\frac{2}{m} \left(\frac{\beta}{v} \right)^2 - \left(\frac{\alpha}{v} \right)^2 (2 - |v| z) \right] C'(\alpha, \beta) - \right. \\ & \left. - 2 C''(\alpha, \beta) \right\} e^{-|v| z} \cos \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (54)$$

unde mișcarea de corp rigid poate să fie precizată prin anumite condiții de fixitate în spațiu. De exemplu, dacă se anulează deplasările și rotațiile în vârful optimei de spațiu elastic, adică dacă se pun condițiile

$$x = y = z = 0 : \begin{cases} u = 0, & v = 0, & w = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (55)$$

se găsește că deplasările sînt nule

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0 \quad (56)$$

iar rotațiile de corp rigid sînt date de

$$\begin{aligned} \omega_x^0 &= -\frac{1+m}{m^2 E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} [A'(\beta, \gamma) - m A''(\beta, \gamma)] d\beta d\gamma, \\ \omega_y^0 &= -\frac{1+m}{m^2 E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\gamma^2 + \alpha^2} [B'(\gamma, \alpha) - m B''(\gamma, \alpha)] d\gamma d\alpha, \\ \omega_z^0 &= -\frac{1+m}{m^2 E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} [C'(\alpha, \beta) - m C''(\alpha, \beta)] d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (56')$$

În ceea ce privește tensiunile și deplasările pe planele de separație, se obțin rezultate remarcabile. Tensiunile normale pe planul $z = 0$ vor fi date de

$$\sigma_x(x, y, 0) = \frac{2}{m} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \beta}{v^2} \left[(1 + m) \left(\frac{\alpha}{v} \right)^2 C'(\alpha, \beta) + m C''(\alpha, \beta) \right] \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \quad (57)$$

$$\sigma_y(x, y, 0) = \frac{2}{m} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \beta}{v^2} \left[(1 + m) \left(\frac{\beta}{v} \right)^2 C'(\alpha, \beta) - m C''(\alpha, \beta) \right] \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta$$

iar tensiunea tangențială de

$$\tau_{xy}(x, y, 0) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \left[1 - 2(1 + m) \left(\frac{\alpha \beta}{v^2} \right)^2 \right] C'(\alpha, \beta) + m \frac{\alpha^2 - \beta^2}{v^2} C''(\alpha, \beta) \right\} \cos \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta. \quad (57')$$

În ceea ce privește starea de deformație, deplasările în planul $z = 0$ vor fi date de

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= -y \omega_z^0 + \frac{2(1 + m)}{m^2 E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{v^2} \left[\frac{\beta^2 - m \alpha^2}{v^2} C'(\alpha, \beta) - \right. \\ &\quad \left. - 2m C''(\alpha, \beta) \right] \cos \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta, \\ v(x, y, 0) &= x \omega_z^0 + \frac{2(1 + m)}{m^2 E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha}{v^2} \left[\frac{\alpha^2 - m \beta^2}{v^2} C'(\alpha, \beta) + \right. \\ &\quad \left. + 2m C''(\alpha, \beta) \right] \sin \alpha x \cos \beta y d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (58)$$

iar deplasarea normală la acest plan se va putea scrie sub forma

$$\begin{aligned} &\frac{m E}{1 + m} [w(x, y, 0) + x \omega_y^0 - y \omega_x^0] = \\ &= \left(1 - \frac{2}{m} \right) \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \beta}{|v| v^2} C'(\alpha, \beta) \sin \alpha x \sin \beta y d\alpha d\beta + \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta}{\lambda^2} \left\{ \left[\frac{2}{m} \left(\frac{\beta}{\lambda} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{\lambda} \right)^2 (2 - |\lambda| x) \right] A'(\beta, \gamma) + \right. \\ &\quad \left. + 2 A''(\beta, \gamma) \right\} e^{-|\lambda| x} \sin \beta y d\beta d\gamma + \end{aligned} \quad (58')$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\mu^2} \left\{ \left[\frac{2}{m} \left(\frac{\alpha}{\mu} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{\mu} \right)^2 (2 - |\mu| y) \right] B'(\gamma, \alpha) - \right. \\ \left. - 2 B''(\gamma, \alpha) \right\} e^{-|\mu| y} \sin \alpha x d\gamma d\alpha.$$

În felul acesta, starea de tensiune și starea de deformare vor fi în întregime precizate.

3. Există un caz de încărcare care nu a putut fi cuprins în studiul general făcut mai sus : cazul unei sarcini tangențiale, uniform distribuită pe una din fețele optimei de spațiu elastic.

Fie, de exemplu, optimea de spațiu elastic, acționată pe fața $z = 0$ de o sarcină tangențială, de intensitate t , paralelă cu axa Ox . Starea de tensiune se va scrie sub forma

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad (59)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \quad \tau_{zx} = t, \quad (59')$$

starea de deformare fiind dată de

$$u = \frac{1+m}{mE} tz, \quad v = 0, \quad w = \frac{1+m}{mE} tx. \quad (60)$$

7. Este interesant de observat că dacă una din fețele optimei de spațiu elastic este aruncată la infinit, se obțin alte domenii infinite, care se pot studia analog. Noi am arătat astfel [5], [6], cum se pot studia semispațiul elastic și sfertul de spațiu elastic cu ajutorul funcțiilor de tensiune.

De exemplu, în cazul sfertului de spațiu elastic $x \geq 0, y \geq 0$, presupunând că pe planele $x = 0, y = 0$ acționează sarcini normale locale de forma (11), se introduc funcții de tensiune de forma

$$F_x = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [A'_1(\beta, \gamma) + |\lambda| x A'_2(\beta, \gamma)] e^{-|\lambda| x} \sin \beta y \sin \gamma z d\beta d\gamma + \\ + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [B'_1(\gamma, \alpha) + |\mu| y B'_2(\gamma, \alpha)] e^{-|\mu| y} \sin \gamma z \sin \alpha x d\gamma d\alpha, \quad (61)$$

cu notațiile (14), și se ia de asemenea

$$F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0. \quad (62)$$

Funcțiile integrabile $A'_i(\beta, \gamma), B'_i(\gamma, \alpha), A''_i(\beta, \gamma), \dots, B'''_i(\gamma, \alpha)$ ($i = 1, 2$), cu $(-\infty < \alpha, \beta, \gamma < \infty)$, trebuie precizate prin condițiile la limită

$$x = 0: \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = t_{xy}(y, z), \quad \tau_{xz} = t_{xz}(y, z), \\ y = 0: \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = t_{yx}(z, x), \quad \tau_{yz} = t_{yz}(z, x). \quad (63)$$

Condițiile la infinit (starea de tensiune nulă) sînt automat verificate, metoda de calcul utilizată corespunzînd la o transformare Fourier.

Studiul problemei se reduce astfel la integrarea unui sistem de patru ecuații integrale, de o formă analoagă cu cele considerate mai sus.

Pentru semispațiul elastic $z \geq 0$, acționat de sarcini tangențiale locale, antisimetrice în raport cu axele Ox, Oy , de forma

$$\begin{aligned} t_{zx}(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty c'(\alpha, \beta) \cos \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta, \\ t_{zy}(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty c''(\alpha, \beta) \sin \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta, \end{aligned} \quad (64)$$

se pot folosi rezultatele obținute mai sus, luînd

$$A'(\beta, \gamma) = A''(\beta, \gamma) = 0, \quad B'(\gamma, \alpha) = B''(\gamma, \alpha) = 0, \quad (65)$$

$$C'(\alpha, \beta) = |\nu| \left[\frac{c'(\alpha, \beta)}{\beta} + \frac{c''(\alpha, \beta)}{\alpha} \right],$$

$$\begin{aligned} C''(\alpha, \beta) &= \frac{1}{|\nu|} \left\{ [1 + m] \beta^2 - \alpha^2 \right] \frac{c'(\alpha, \beta)}{\beta} + \\ &+ [\beta^2 - (1 + m) \alpha^2] \frac{c''(\alpha, \beta)}{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (65')$$

Se observă că sistemul de ecuații integrale (32) (32') este satisfăcut (primele două ecuații nu intervin în problemă; ele pot fi de altfel considerate ca verificate, deoarece $a'(\beta, \gamma)$, $a''(\beta, \gamma)$, $b'(\gamma, \alpha)$, $b''(\gamma, \alpha)$ sînt funcții arbitrare).

Formulele (53), (53'), (54) ne permit în acest caz să exprimăm starea de tensiune și starea de deformare. De exemplu, tensiunea normală σ_z , normală la planul de separație, va fi dată de

$$\sigma_z = z \int_0^\infty \int_0^\infty [\alpha c'(\alpha, \beta) + \beta c''(\alpha, \beta)] e^{-|\nu|z} \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta \quad (66)$$

iar deplasarea normală la acest plan se va putea scrie sub forma

$$\begin{aligned} \frac{mE}{1+m} [w - (-x \omega_y^0 + y \omega_x^0 + w_0)] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\alpha \beta}{\nu^2} \left[\frac{c'(\alpha, \beta)}{\beta} + \right. \\ &+ \left. \frac{c''(\alpha, \beta)}{\alpha} \right] \left(1 - \frac{2}{m} + |\nu|z \right) e^{-|\nu|z} \sin \alpha x \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned} \quad (67)$$

Constatăm astfel că rezultatele obținute pentru optimea de spațiu elastic se pot extinde cu ușurință la sfertul de spațiu elastic și la semispațiul elastic.

BIBLIOGRAFIE

- [1] E. Almansi: Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2 u = 0$, Ann. di Matem., ser. 3, t. V, nr. 2, 1898, p. 1.
- [2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов: Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, Москва, 1959.
- [3] P. P. Teodorescu: Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité, IX^{me} Congrès Intern. de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 1956, Actes, t. V, 1957, p. 155.
- [4] P. P. Teodorescu: Asupra unor probleme spațiale ale teoriei elasticității, St. și cerc. de mec. apl., t. VIII, nr. 4, 1957, p. 1101.
- [5] P. P. Teodorescu: Über einige räumliche Probleme der Elastizitätstheorie, Aplikace Matematiky, Praha, t. 4, nr. 5, 1959, p. 225.
- [6] P. P. Teodorescu: Fonctions de tension dans le problème tridimensionnel de la théorie de l'élasticité, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., t.3 (51), nr. 3, 1959, p. 425.
- [7] P. P. Teodorescu: Sur le problème du coin plan élastique. C. Rend. hebdom. des séances de l'Acad. des Sc., t. 250, nr. 21, 1960, p. 3446.
- [8] P. P. Teodorescu: Sur le problème du quart de plan élastique, Aplikace Matematiky, Praha, t. 6, nr. 5, 1961, p. 359.
- [9] P. P. Teodorescu: Probleme plane în teoria elasticității, vol. I, Ed. Acad. R.P.R. București 1961.
- [10] P. P. Teodorescu: Sur l'effet de coin en élasticité tridimensionnelle, Archiwum Mechaniki Stosowanej, t. XVII, nr. 2, 1965.

О ЗАДАЧЕ ВОСЬМОЙ ЧАСТИ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Используя общий метод решения пространственной задачи теории упругости, данной раньше [3], определяется напряжённое состояние и деформированное состояние, внутри восьмой части упругого пространства $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, находящейся под действием касательных нагрузок на плоскостях раздела. С математической точки зрения решение задачи сводится к интегрированию системы шести интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода.

SUR LE PROBLÈME DU DEMI-QUART D'ESPACE ÉLASTIQUE SOUMIS À L'ACTION D'UNE CHARGE TANGENTIELLE

R É S U M É

En utilisant une méthode générale de résoudre le problème tridimensionnel de la théorie de l'élasticité, donnée antérieurement [3], on détermine l'état de tension et l'état de déformation dans l'intérieur du demi-quart d'espace élastique $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, actionné par des charges tangentielles sur les plans de séparation. Du point de vue mathématique la solution du problème se réduit à l'intégration d'un système de six équations intégrales du type de Fredholm, de la seconde espèce.

ARIPA RECTANGULARĂ SEMIINFINITĂ ÎN MIȘCAREA TRANSONICĂ NESTAȚIONARĂ

STELIAN TURBATU

1. Problema aripei rectangulare seminfinite avînd o mișcare oscilatorie armonică, a fost studiată în cazul transonic nestaționar de *M. T. Landahl* [4], [5]. Calea frecvent folosită în studiul mișcărilor transonice nestaționare este calea obținerii de soluții prin trecerea la limita $M_\infty \rightarrow 1$ în soluțiile din cazul supersonic nestaționar; evident, acolo unde această trecere la limită este permisă. În multe din lucrările care se ocupă de cazul supersonic, soluția este dată într-o formă care nu permite trecerea la limita amintită, așa că o tratare separată a cazului transonic se impune de la sine. *M. T. Landahl* [4], [5] caută soluția problemei pe cale directă, extinzînd în acest scop o metodă dată de *H. Lamb* [3]. El reușește astfel să dea soluția pe aripă, adică pentru cazul $z = 0$. Este cunoscută însă importanța practică a cunoașterii potențialului vitezelor nu numai pe aripă ci și în vecinătatea ei, aceasta dînd posibilitatea să se studieze fenomenele de interferență. Avînd în vedere acest fapt, vom da în prezenta notă o expresie pentru potențialul vitezelor de perturbație $\Phi(x, y, z, t)$ valabilă în vecinătatea aripei, urmînd o cale folosită de *A. P. Burger* [1] într-o problemă din teoria difracției.

2. Fie o mișcare fără frecare, fără transfer de căldură, izentropică și nestaționară. În acest caz, mișcarea este descrisă de un potențial al vitezelor. Teoria micilor perturbații furnizează atunci în domeniul transonic o ecuație cu derivate parțiale neliniară [5] de forma :

$$\left[1 - M_\infty^2 - M_\infty^2 (\gamma + 1) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Aici $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ este potențialul vitezelor de perturbație, γ raportul căldurilor specifice, iar M_∞ numărul lui Mach în mișcarea neperturbată.

M. T. Landahl [5] a arătat că o condiție suficientă pentru obținerea unei ecuații cu derivate parțiale liniară, în cazul mișcării oscilatorii, este :

$$k \gg |1 - M|, \quad (2)$$

unde M este numărul lui Mach în mișcarea locală, iar k este frecvența redusă. În acest caz, se obține pentru domeniul transonic ecuația liniară :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

În cele ce urmează, ne vom mărgini ca și în [4], [5] numai la cazul $M_\infty = 1$, așa încît ecuația (3) devine :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

Să considerăm acum o aripă rectangulară semiinfinită ocupînd primul cadran în planul $z = 0$, situată într-un curent de aer animat la infinit de viteza U_∞ . Sistemul de axe de coordonate este astfel ales, încît axa Ox să fie paralelă și de același sens cu viteza U_∞ a curentului. Vom lua ca și *M. T. Landahl* [5] $U_\infty = 1$. Variabilele x, z, y cît și celelalte mărimi sînt considerate ca fiind adimensionale. În acest sens, t este interpretat ca un timp adimensional, obținut prin multiplicarea timpului fizic cu U_∞/b , unde b este o lungime caracteristică a aripei.

În cazul de față aripa fiind plană, condițiile la limită ale problemei au după [4], [5] următoarea formă :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = h(x, y, t) \text{ pe aripă} \quad (5)$$

și

$$\Phi|_{z=0} = 0 \text{ în exteriorul aripei.} \quad (6)$$

Aici $h(x, y, t)$ este o funcție dată.

Considerînd oscilațiile armonice, vom pune :

$$\Phi = \operatorname{Re}\{\varphi(x, y, z) e^{ikt}\} \quad (7)$$

$$h = \operatorname{Re}\{g(x, y) e^{ikt}\}, \quad (8)$$

așa încît introducînd aceste relații în ecuațiile (4), (5) și (6), problema la limită ce o avem de rezolvat se enunță astfel : Să se găsească o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \varphi = 0, \quad (9)$$

ce verifică condițiile la limită

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = g(x, y) \text{ pentru } x > 0, y > 0 \quad (10)$$

și

$$\varphi|_{z=0} = 0 \text{ în exteriorul aripei.} \quad (11)$$

Fie mai departe transformata Fourier [8] a funcției $\varphi(x, y, z)$ în raport cu x , definită astfel :

$$\psi(y, z, s) = F\{\varphi(x, y, z)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z) e^{-isx} dx. \quad (12)$$

Inversa formulei (12) este :

$$\varphi(x, y, z) = F^{-1}\{\psi(y, z, s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y, z, s) e^{isx} ds. \quad (13)$$

Cu această transformare problema la limită definită de ecuațiile (9), (10) și (11) trece în problema la limită următoare: Să se găsească o soluție a ecuației

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \lambda^2 \psi = 0, \quad (14)$$

ce verifică condițiile la limită

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = G(y, s) \quad \text{pentru } y > 0 \quad (15)$$

$$\psi|_{z=0} = 0. \quad \text{pentru } y < 0. \quad (16)$$

Aici

$$\lambda = (2ks + k^2)^{1/2} \quad (17)$$

și

$$G(y, s) = F\{g(x, y)\}. \quad (18)$$

Vom lua în cele ce urmează $\text{Im}(\lambda) > 0$. Presupun de asemenea, că frecvența redusă k are partea imaginară mică și negativă.

În scopul de a obține soluția problemei la limită definită de ecuațiile (14), (15) și (16), să pornim de la cunoscuta formulă [1] :

$$\psi(y, z, s) = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\psi \frac{\partial H_0^{(1)}(\lambda R)}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\lambda R) \right\}_{\zeta=0} d\eta, \quad (19)$$

ce se obține de la formula lui Green și care este valabilă numai pentru $z > 0$. R este distanța între punctele (y, z) , (η, ζ) dată de relația :

$$R^2 = (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \quad (20)$$

iar $H_0^{(1)}$ este funcția Hankel de speța întâi și ordin zero [6]. Cu (20) relația (19) mai poate fi scrisă sub forma :

$$\psi(y, z, s) = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \psi \frac{\partial H_0^{(1)}(\lambda R)}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\lambda R) \right\}_{\zeta=0} d\eta. \quad (21)$$

Pentru z negativ integrala dispăre, așa încît înlocuind în (21) z prin $(-z)$ obținem :

$$0 = \frac{1}{4i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\psi \frac{\partial H_0^{(1)}(\lambda R)}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\lambda R) \right\}_{\zeta=0} d\eta. \quad (22)$$

Adunând relațiile (21) și (22) găsim :

$$\psi(y, z, s) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} H_0^{(1)}(\lambda R) \right\}_{\zeta=0} d\eta. \quad (23)$$

Fie acum

$$r = \sqrt{(y - \eta)^2 + z^2}. \quad (24)$$

Cu (24) formula (23) ia forma

$$\psi(y, z, s) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\zeta}(\eta, 0) H_0^{(1)}(\lambda r) d\eta. \quad (25)$$

Să folosim acum reprezentarea integrală a funcției Hankel [6]

$$H_0^{(1)}(Z) = \frac{2}{\pi i} \int_1^{\infty} e^{i\tau Z} \frac{d\tau}{\tau^2 - 1}. \quad (26)$$

Înlocuind (26) în (25) obținem :

$$\psi(y, z, s) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\zeta}(\eta, 0) d\eta \int_r^{\infty} e^{i\lambda Z} \frac{dZ}{\sqrt{Z^2 - r^2}}. \quad (27)$$

Fie mai departe substituția :

$$Z - y - \eta = 2\zeta. \quad (28)$$

De la (28) găsim, ținând cont de (24), relația

$$Z^2 - r^2 = 4(\zeta + y)(\zeta + \eta) - z^2. \quad (29)$$

Cu (28) și (29) relația (27) trece în

$$\psi(y, z, s) = -\frac{e^{i\lambda y}}{\pi} \int_{-y}^{\infty} (\zeta + y)^{-1/2} e^{2i\lambda \zeta} d\zeta \int_{-\zeta + \frac{z^2}{4(\zeta + y)}}^{\infty} \left[\zeta + \eta - \frac{z^2}{4(\zeta + y)} \right]^{-1/2} e^{i\lambda \eta} \psi_{\zeta}(\eta, 0) d\eta. \quad (30)$$

Să folosim acum condiția la limită (16). Vom avea atunci pentru y negativ și $z = 0$ de la (30) relația :

$$0 = \int_{-y}^{\infty} (\zeta + y)^{-1/2} e^{2i\lambda \zeta} d\zeta \int_{-\zeta}^{\infty} (\zeta + \eta)^{-1/2} e^{i\lambda \eta} \psi_{\zeta}(\eta, 0) d\eta. \quad (31)$$

După cum se vede, relația (31) are forma unei ecuații integrale de tip Abel [9]. Pentru ca (31) să aibă loc, trebuie după [9] ca

$$\int_{-\zeta}^{\infty} (\zeta + \eta)^{-1/2} e^{i\lambda \eta} \psi_{\zeta}(\eta, 0) d\eta = 0, \quad (32)$$

relație valabilă pentru toți $\xi > 0$, deoarece în (31) integrarea se face pentru $\xi > -y$ cu y negativ. E de observat aici că ecuația (32) are din nou forma unei ecuații integrale de tip Abel. Aici însă integrantul nu dispare, din cauza restricției ca ξ să ia valori pozitive. De la (32) se vede că integrala interioară în (30) dispare numai atunci când

$$-\xi + \frac{z^2}{4(\xi + y)} < 0,$$

adică atunci când

$$\xi > \frac{1}{2}(-y + \sqrt{y^2 + z^2}),$$

asa încît, deoarece integrarea față de η se face numai pe axa pozitivă, soluția problemei la limită definită de ecuațiile (14), (15) și (16), se poate da de la (30) sub forma:

$$\begin{aligned} \psi(y, z, s) = & -\frac{e^{i\lambda y}}{\pi} \int_{-y}^{\frac{1}{2}(-y + \sqrt{y^2 + z^2})} (\xi + y)^{-1/2} e^{2i\lambda \xi} d\xi \int_{-\xi + \frac{z^2}{4(\xi + y)}}^{\infty} \left[\xi + \eta - \right. \\ & \left. - \frac{z^2}{4(\xi + y)} \right]^{-1/2} e^{i\lambda \eta} G(\eta, s) d\eta. \end{aligned} \quad (33)$$

Va trebui acum să găsim inversa formulei (33). Cum se poate ușor constata [8]:

$$F^{-1}\{e^{-ids^{1/2}}\} = \begin{cases} \frac{i+1}{2} \frac{d}{x^{3/2}} e^{-i\frac{d^2}{4x}} & \text{pentru } x > 0 \\ 0 & \text{pentru } x < 0 \text{ și } \text{Im}(d^2) < 0, \end{cases} \quad (34)$$

iar

$$F^{-1}\{G(y, s)\} = g(x, y) \text{ pentru } x > 0, \quad (35)$$

asa că prin aplicarea teoremei de convoluție relativă la transformata Fourier [8], obținem de la relația (33) expresia:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & - \\ & - \frac{1}{\pi} \frac{i+1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} \int_0^x \exp\left[-i\frac{k}{2}(x-x_1)\right] \frac{dx_1}{(x-x_1)^{3/2}} \int_{-y}^{\frac{1}{2}(-y + \sqrt{y^2 + z^2})} (\xi + y)^{-1/2} d\xi \times \\ & \times \int_{-\xi + \frac{z^2}{4(\xi + y)}}^{\infty} (y + \eta + 2\xi) \left[\xi + \eta - \frac{z^2}{4(\xi + y)} \right]^{-1/2} \exp\left[-i\frac{k}{2} \frac{(y + \eta + 2\xi)^2}{x - x_1}\right] g(x_1, \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (36)$$

Aceasta este soluția problemei la limită definită de ecuațiile (9), (10) și (11).

De la (36) și (7) obținem potențialul vitezelor de perturbație pentru problema dată sub forma :

$$\Phi(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{\pi} \frac{i+1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{ikt} \int_0^x \exp \left[-\frac{ik}{2} (x-x_1) \right] \frac{dx_1}{(x-x_1)^{3/2}} \int_{-y}^{\frac{1}{2}(-y+\sqrt{y^2+z^2})} (\xi+y)^{-1/2} d\xi \times \right. \\ \left. \times \int_{-\xi+\frac{z^2}{4(\xi+y)}}^{\infty} (y+\eta+2\xi) \left[\xi+\eta-\frac{z^2}{4(\xi+y)} \right]^{-1/2} \exp \left[-i\frac{k}{2} \frac{(y+\eta+2\xi)^2}{x-x_1} \right] g(x_1, \eta) d\eta \right\}. \quad (37)$$

Pe aripă, adică pentru $z = 0$, vom avea de la (37) potențialul vitezelor de perturbație sub forma :

$$\Phi(x, y, 0, t) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{1}{\pi} \frac{i+1}{2} \sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{ikt} \int_0^x \exp \left[-i\frac{k}{2} (x-x_1) \right] \frac{dx_1}{(x-x_1)^{3/2}} \int_0^y (y-\xi)^{-1/2} d\xi \times \right. \\ \left. \times \int_{\xi}^{\infty} (y+\eta-2\xi) (\eta-\xi) \exp \left[-\frac{ik}{2} \frac{(y+\eta-2\xi)^2}{x-x_1} \right] g(x_1, \eta) d\eta \right\}. \quad (38)$$

3. Să considerăm acum cazul în care g este independent de y . În acest caz $G = G(s)$ și pentru $z = 0$ avem de la (33) expresia :

$$\psi(y, 0, s) = -\frac{G}{\pi} e^{i\lambda y} \int_0^y (y-\xi)^{-1/2} e^{-i2\xi} d\xi \int_{\xi}^{\infty} (\eta-\xi)^{-1/2} e^{i\lambda\eta} d\eta. \quad (39)$$

După [2], ultima integrală din (39) are valoarea :

$$\int_{\xi}^{\infty} (\eta-\xi)^{-1/2} e^{i\lambda\eta} d\eta = -i \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda}} e^{i\lambda\xi}. \quad (40)$$

Înlocuind (40) în (39) obținem :

$$\psi(y, 0, s) = \frac{iG}{\sqrt{i\pi\lambda}} e^{i\lambda y} \int_0^y (y-\xi)^{-1/2} e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (41)$$

Cum se poate ușor constata [2],

$$\int_0^y (y-\xi)^{-1/2} e^{-i\lambda\xi} d\xi = 2y^{1/2} F_1^{(1)} \left(1, \frac{3}{2}, -i\lambda y \right), \quad (42)$$

unde $F_1^{(1)}$ este funcția lui Kummer [6], [7]. Cu (42) relația (41) devine :

$$\psi(y, 0, s) = (i+1) \frac{G}{\lambda} \pi^{-1/2} 2^{1/2} (\lambda y)^{1/2} e^{i\lambda y} F_1^{(1)} \left(1, \frac{3}{2}, -i\lambda y \right). \quad (43)$$

După [7] avem însă

$$e^{i\lambda y} F_1^{(1)} \left(1, \frac{3}{2}, -i\lambda y \right) = F_1^{(1)} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, i\lambda y \right),$$

аşa încât (43) se mai scrie :

$$\psi(y, 0, s) = (i + 1) \frac{G}{\lambda} \pi^{-1/2} 2^{1/2} (\lambda y)^{1/2} F_1^{(1)} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, i\lambda y \right). \quad (44)$$

Este cunoscut [7] că legătura între funcția Kummer și integralele Fresnel este dată de relația :

$$C(q) \pm i S(q) = \pi^{-1/2} 2^{1/2} q^{1/2} F_1^{(1)} \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pm iq \right). \quad (45)$$

Folosind (45), expresia (44) se mai scrie sub forma :

$$\psi(y, 0, s) = (i + 1) \frac{G}{\lambda} [C(\lambda y) + iS(\lambda y)]. \quad (46)$$

O relație analogă a fost obținută de *M. T. Landahl* [4], [5] în cazul $\text{Im}(\lambda) < 0$. Pentru scopuri practice, inversa relației (46) se poate ușor da urmînd calea folosită de *M. T. Landahl* [4], [5].

BIBLIOGRAFIE

- [1] Burger, A. P.: The half-plane diffraction problem for harmonic time dependence. *Proceedings of the Royal Soc. of London, Series A, Vol. 252 (1959)*.
- [2] Erdelyi: Magnus, Oberhettinger, Tricomi. *Tables of integral transforms Vol. I, II, McGraw-Hill Book Company, Inc (1954)*.
- [3] Lamb, H.: On Sommerfeld's diffraction problem; and on reflection by a parabolic mirror. *Proc. London Math. Soc., Ser. 2, Vol. 4 (1907)*.
- [4] Landahl, M. T.: The oscillating semi-infinite rectangular wing. *The Aeron. Research Institute of Sweden (FFA), Report 78 (1958)*.
- [5] Landahl, M. T.: Unsteady transonic flow. *Pergamon Press, Oxford/London/New-York/Paris (1961)*.
- [6] Ryshik, M. I. und Gradstein, S. I.: *Summen-Produkt und Integral- Tafeln. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1957)*.
- [7] Schäfer, W. F.: Einführung in die Theorie der Speziellen Funktionen der mathematischen Physik. *Springer-Verlag. Berlin/Göttingen/Heidelberg (1963)*.
- [8] Sneddon, J.: *Fourier transforms. McGraw-Hill, New-York/Toronto/London (1951)*.
- [9] Zaanen, C. A.: *Linear analysis. North-Holland Publishing Co.-Amsterdam (1943)*

ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЕ КРЫЛО В НЕСТАЦИОНАРНОМ ОКОЛОЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Посредством преобразования Фурье вычисляется потенциал скорости возмущения для полубесконечного прямоугольного крыла с гармоническими колебаниями в околозвуковом движении.

RECTANGULAR SEMI-INFINITE WING IN TRANSONIC NON-STATIONARY FLOW

SUMMARY

By use of Fourier transform the perturbation velocity potential for an harmonic oscillating semi-infinite rectangular wing in transonic flow is given.

PROBLEME DE TEORIA CONSTRUCTIVĂ A FUNCȚIILOR RELATIVE LA O NOUĂ CLASĂ DE ECUAȚII INTEGRO-DIFERENȚIALE

I. Aproximarea soluțiilor unor noi serii de probleme de contur prin polinoamele lui S. N. Bernstein

D. MANGERON

1. Dezvoltarea impetuoasă a teoriei constructive a funcțiilor, elaborată în profunzime grație remarcabilelor lucrări ale marilor matematicieni M. Picone [22], P. L. Cebîșev și S. N. Bernstein [1], [2] și elevilor lor, a condus în particular la o vastă serie de studii în domeniul aproximării soluțiilor variatelor clase de ecuații integro-diferențiale, datorite îndeosebi lui Ia. V. Bikov [3], L. E. Krivoșein [4], S. Vasilache [5], aut. [6] ș. a.

Într-un șir de lucrări recente autorul, singur sau în colaborare cu L. E. Krivoșein, a studiat, pornind de la o serie de noi probleme de contur de tip neeliptic formulate și rezolvate anterior [7]—[11] și adîncite apoi și de alți cercetători [12]—[18], variate probleme de contur pentru unele clase de ecuații integro-diferențiale, de importanță din ce în ce mai mare în fizica-matematică [19]—[20].

În cele ce urmează se rezolvă, luîndu-se la bază polinoamele lui S. N. Bernstein [21], problema de teoria constructivă a funcțiilor relativă la ecuații integro-diferențiale cu derivate parțiale avînd derivata de ordin superior a lui M. Picone.

2. Se consideră problema de contur

$$[D^i u(x, y)]_{x=0} = \varphi(y); [D^i u(x, y)]_{y=0} = \psi_i(x) \quad (i = 0, 1, \dots, k-1) \quad (1)$$

relativă la ecuația integro-diferențială

$$\begin{aligned} D^k u(A) + \lambda \sum_{i=k-1}^0 \sum_{j=k-1}^0 r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = \\ = f(A) + \lambda \iint_S \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB, \end{aligned} \quad (2)$$

în care $D^k u(A) \equiv \frac{\partial^{2k} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^k}$ este derivata totală de ordin k în sensul lui Picone [22], [23],

$$\frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} \equiv \frac{\partial^{i+j} u(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j}; \quad f(A) \equiv f(x, y);$$

$$K_{ij}(A, B) \equiv K_{ij}(x, y, \xi, \eta); \quad \varphi_i(y), \quad \psi_i(x), \quad r_{ij}(A) \equiv r_{ij}(x, y)$$

sînt funcții continue cunoscute pentru toate valorile variabilelor $x, \xi \in [0, 1], y, \eta \in [0, 1], S$ fiind domeniul pătratic $[0, 1] \times [0, 1]$.

În vederea reducerii problemei considerate la un sistem de ecuații lineare integro-diferențiale ordinare să punem

$$u(x, y) \approx \sum_{i=0}^p C_p^i y^i (1-y)^{p-i} u(x, i: p) \equiv \sum_{i=0}^p T_{pi}(y) u(x, i: p) \equiv \tilde{B}_p(x, y). \quad (3)$$

Presupunînd că problema (1) (2) posedă în clasa funcțiilor de $2k$ ori continuu derivabile o soluție unică, avem

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \tilde{B}_p(x, y) - \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u(A) \right| \leq 0 \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \right), \quad (4)$$

($i, j = 0, 1, \dots, k; A \in S$).

Deoarece

$$\frac{\partial^{r+s} u(A)}{\partial x^r \partial y^s} \approx \sum_{i=0}^p \frac{d^r u(x, i: p)}{dx^r} T_{pi}^{(s)}(y) \equiv \sum_{i=0}^p \frac{d^r u_i(x)}{dx^r} T_{pi}^{(s)}(y), \quad (5)$$

rezultă că după substituirea în ecuația (2) a derivatelor $\frac{\partial^{r+s} u(A)}{\partial x^r \partial y^s}$ pe baza formulelor (5) se ajunge la următorul sistem de ecuații integro-diferențiale ordinare:

$$\sum_{i=0}^p \left[\frac{d^k u_i(x)}{dx^k} T_{pi}^{(k)}(y) + \lambda \sum_{v=k-1}^0 \sum_{s=k-1}^0 r_{vs}(x, y) \frac{d^v u_i(x)}{dx^v} T_{pi}^{(s)}(y) - \right. \\ \left. - \lambda \iint_S \sum_{v=0}^k \sum_{s=0}^k K_{vs}(x, y, \xi, \eta) \frac{d^v u_i(\xi)}{d\xi^v} T_{pi}^{(s)}(\eta) d\xi d\eta \right] = f(x, y). \quad (6)$$

Punînd în (6) $y = 0, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, 1$, se ajunge la un sistem

de $p+1$ ecuații cu același număr de funcții necunoscute $u_i(x)$. Să notăm prin (8) acest sistem. Soluția sistemului (8) este supusă la condițiile

$$\left. \frac{d^r u_i(x)}{dx^r} \right|_{x=0} = \varphi_r(i: p) \quad (r = 0, 1, \dots, k-1), \quad (7)$$

în care trebuie să se țină seama de faptul că, în virtutea condițiilor (1) $u_0^{(r)}(x)$ ($r = 0, 1, \dots, k-1$) sînt funcții cunoscute.

Fie $u_i(x) = S_i(x, \lambda)$ ($i = 0, 1, \dots, p$) — soluția problemei (7) relativă la sistemul de ecuații integro-diferențiale

$$\sum_{i=0}^p \left[\frac{d^k u_i(x)}{dx^k} T_{pi}^{(k)}(r:p) + \lambda \sum_{v=k-1}^0 \sum_{s=k-1}^0 r_v(x, r:p) \frac{d^v u_i(x)}{dx^v} T_{pi}^{(v)}(r:p) - \right. \\ \left. - \lambda \iint_S \sum_{v=0}^k \sum_{k=0}^k K_{vs}(x, r:p, \xi, \eta) \frac{d^v u_i(\xi)}{d\xi^v} T_{pi}^{(s)}(\eta) d\xi d\eta \right] = f(x, r:p), \quad (8)$$

$$(r = 0, 1, \dots, p).$$

În corespondență cu cele de mai sus formula

$$u_{kp}(x, y) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) \sum_{i=0}^p S_i(\xi, \lambda) T_{pi}(\eta) dB \quad (9)$$

reprezintă soluție aproximativă a problemei considerate, în care funcțiile $\Phi(A)$ și $N(A, B)$ sînt definite respectiv prin

$$D^k \Phi(A) = f(A), \quad [D^i \Phi(A)]_{x=0} = \varphi_i(y), \quad [D^i \Phi(A)]_{y=0} = \psi_i(x) \quad (10)$$

$$(i = 0, 1, \dots, k-1);$$

$$N(A, B) \equiv [(x - \xi)(y - \eta)]^{k-1} : (k-1)!^2; \quad dB = d\xi d\eta, \quad (11)$$

$$\{(x, y), (\xi, \eta)\} \in T = \{a \leq \xi \leq x \leq b; c \leq \eta \leq y \leq d\}.$$

3. Să studiem în cele ce urmează eroarea comisă prin adoptarea soluției aproximative găsite (9).

Deoarece prin substituția (9')

$$u(A) = \Phi(A) + \lambda \iint_T N(A, B) v(B) dB,$$

ecuația integro-diferențială (2) poate fi scrisă în noua funcție necunoscută $v(A)$ sub forma

$$v(A) - \lambda \iint_S L(A, B) v(B) dB = F(A, \lambda), \quad (12)$$

în care $L(A, B)$ și $F(A, \lambda)$ sînt funcții cunoscute, se poate studia valoarea expresiei $1 - \max_Q \iint_S |\lambda L(A, B)| dB$, în care

$$Q = \{0 < \lambda < \lambda_1; S\}.$$

În ipoteză că are loc inegalitatea

$$l_2 = 1 - \max_Q \iint_S |\lambda L(A, B)| dB > 0, \quad (13)$$

și prin $\beta_{kp}(A, \lambda)$ s-a notat decalajul format în urma substituirii funcției (9) în ecuația (2); se obține

$$\gamma(A) = \iint_T N(A, B) [\beta_{kp}(B, \lambda) + \lambda H(B)] dB, \quad (14)$$

$$H(A) - \lambda \iint_S L(A, B) H(B) dB = \delta_{kp}(A, \lambda), \quad (15)$$

în care s-a pus

$$u_{kp}(A) - u(A) \equiv \gamma(A), \quad (16)$$

$$\iint_S \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k K_{ij}(A, B) \frac{\partial^{i+j} \gamma(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} dB - \sum_{i=k-1}^0 \sum_{j=k-1}^0 r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} \gamma(A)}{\partial x^i \partial y^j} \equiv H(A). \quad (17)$$

Din (15) rezultă

$$\max_S |H(A)| < \max_Q |\delta_{kp}(A, \lambda)| : l_2 = \gamma_{lp}. \quad (18)$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} |u_{kp}(A) - u(A)| &\leq \left| \iint_T N(A, B) \delta_{kp}(B, \lambda) dB \right| + \\ &+ \iint_T |\lambda N(A, B)| dB \cdot \gamma_{lp} = \rho_{kp}(A, \lambda), \quad (A, \lambda) \in Q. \end{aligned} \quad (19)$$

Este evident că pentru toți $(A, \lambda) \in Q$ are loc următoarea evaluare a modulului soluției problemei considerate (1), (2):

$$|u(A)| \leq |u_{kp}(A)| + \rho_{kp}(A, \lambda). \quad (20)$$

Observație. Dacă în ecuația (2) avem $K_{ij}(A, B) \equiv 0$ ($i, j = 0, 1, \dots, k$; $\langle A, B \rangle \in S$), atunci ecuația (2) devine o ecuație diferențială cu derivate parțiale

$$D^k u(A) + \lambda \sum_{i=k-1}^0 \sum_{j=k-1}^0 r_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = f(A), \quad (21)$$

studiată, în cazul în care și termenii din suma dublă nu conțin decât derivate totale de diferite ordine inferioare ordinului k , în [24]. Metoda expusă este prin urmare valabilă și în cazul sistemului diferențial (1), (21).

4. Rezultatele expuse, ce pot fi extinse la clase de probleme de contur mai generale și la un număr oarecare de dimensiuni, fac parte din seria de cercetări în domeniul teoriei constructive a funcțiilor întreprinse de autor în colaborare cu L. E. Krivoșein. Alt șir de rezultate obținute în aceeași ordine de idei a fost expus într-un număr de note prezentate la academiile de științe din R. P. Chineză [25], R.P. Bulgaria [26], Italia [27] și Franța [28]—[29], precum și la Congresul Internațional al matematicienilor de la Stockholm [30] și, firește, la Academia R.P.R. [31]—[32].

BIBLIOGRAFIE

- [1] J. Todd: *Introduction to the Constructive Theory of Functions*. International Series of Numerical Mathematics (ISNM), Vol. I, Birkhäuser Verlag, Basel, 1963, 140 p.
- [2] В. Л. Гончаров: *Теория интерполирования и приближения функций*. Изд. 2-е, ГИТТЛ, М., 1954.
- [3] Я. В. Быков: *О некоторых методах построения решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*. АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1961 г.
- [4] Л. Е. Кривошеин: *Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений*. АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1962 г., 184 стр.
- [5] С. Василаске: *О новых краевых задачах для некоторых интегро-дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных*. Rev. math. pures et appl., Bucarest, s. 5, 2, 1960, pp. 251—274.
- [6] D. Mangeron: *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptique d'ordre supérieur*. C. r. Acad. Sci., Paris, 255, 1962, pp. 2894—2896.
- [7] D. Mangeron: *Sur une classe de problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. C. r. Acad. Sci., Paris, 204, 1937, pp. 94—96; 544—546; 1022—1024.
- [8] D. Mangeron: *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale non lineare alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*. Accademia Naz. dei Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 6, 2, 1932, fasc. 7—8, pp. 305—310.
- [9] D. Mangeron: *Sur les fonctions de Green pour les équations aux dérivées partielles d'ordres supérieur à caractéristiques réelles*. Mathematica, Cluj, 14, 1938, pp. 31—35.
- [10] D. Mangeron: *Applicazione della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito all'integrazione delle equazioni alle derivate parziali d'ordine superiore*. Rend. dell'Accademia d'Italia, s. 7, 1, 1, 1939, pp. 1—9.
- [11] D. Mangeron: *Sur quelques problèmes du calcul de variation liés à la théorie d'une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. Bull. Inst. polytechn. de Jassy, 3, 1, 1948, pp. 153—155.
- [12] A. Rosenblatt: *Sur le problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples*. C. r. Acad. Sci., Paris, 197, 1933, 1278—1280.
- [13] M. Salvadori: *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*. Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. 2, V, 1936, pp. 51—72.
- [14] F. Manaresi: *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*. Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, XXIII, 1954, pp. 163—213.
- [15] G. Stampacchia: *Un teorema di calcolo delle variazioni ed applicazioni a problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali del tipo iperbolico*. Giorn. di Matematiche, s. 4, 78, 1948—49, pp. 81—96.
- [16] L. Poli, P. Delerue: *Le calcul symbolique à deux variables*. Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [17] Ю. М. Березанский: *О краевых задачах для общих дифференциальных операторов в частных производных*. Доклады АН СССР, 122, № 6, 1958, стр. 959—962.
- [18] Л. Е. Кривошеин: *К решению одной задачи для интегро-дифференциальных уравнений*. In volumul: „Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии”. АН Кирг. ССР, Фрунзе, 1961 г., стр. 177—190.
- [19] G. F. Kohlmaуr: *Die Greenische Funktion zum Integrodifferentialoperator der stationären Neutrontransporttheorie*. Acta phys. austriaca, 13, 2—3, 1960, pp. 300—314.
- [20] V. Volterra: *La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari*. Opere Matematiche, vol. V, Accademia Naz. dei Lincei, Roma, 1962, pp. 170—199.
- [21] С. Н. Бернштейн: *Собрание сочинений*, Изд. АН СССР, М., 1952, стр. 105—106.
- [22] M. Picone: *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*. Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, I-e Section (Math., Phys., Chimie), 26, 1, 1940, pp. 183—232.
- [23] D. Mangeron: *On a new class of functions related to the equations with „total derivatives”*. Bul. Inst. politehn. Iași, n.s., 4 (8), 3—4, 1958, pp. 73—74.

- [24] D. Mangeron: *Sur les problèmes de Dirichlet relatifs aux équations à dérivées totales.* Bul. Inst. politehn. Iași, n.s., 3(7), 3—4, 1957, 49—52.
- [25] D. Mangeron, L. E. Krivochéine: *Polynomial method in the approximate determination of the solution of the boundary value problem of linear integro-differential equations.* Acta Mathematica Sinica, 12, 2, 1962, pp. 175—178. (In limba chineză).
- [26] D. Mangeron, L. Krivochéine: *Recherches des solutions des équations intégral-différentielles par la méthode polynomiale.* C. r. Acad. Bulgare des Sci., 15, 4, 1962, 345—350.
- [27] D. Mangeron, L. E. Krivochein: *Sopra una classe di problemi al contorno per alcuni tipi di equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* Accademia Naz. dei Lincei. Rend., Cl., Sci. fis., mat. e nat., s. 8, 32, 1—2, 1962, pp. 49—54.
- [28] D. Mangeron, L. E. Krivochéine: *Approximation par les polynômes de Bernstein des solutions de certains problèmes à la frontière pour les équations intégral-différentielles d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, 254, 1962, pp. 3624—3626.
- [29] D. Mangeron, L. E. Krivochéine: *Sur l'évaluation des erreurs de détermination de solutions d'une classe d'équations intégral-différentielles aux dérivées totales.* C. r. Acad. Sci., Paris, 253, 1961, pp. 1190—1192.
- [30] D. Mangeron: *Sur une nouvelle classe de problèmes à la frontière.* International Congress of Mathematicians, Stockholm, 1962. Programme, p. 62.
- [31] Д. Манжерон, Л. Е. Кривошеин: *Решение одного класса граничных задач.* Rev. Math. pures et appl., Acad. R.P.R., București, 1962 (sub tipar).
- [32] Д. Манжерон, Л. Е. Кривошеин: *Решение интегро-дифференциальных уравнений многочленным методом.* Mathematica, Cluj, 4 (27), 2, 1962.

**ВОПРОСЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ ОТНОСЯЩИХСЯ К
НОВОМУ КЛАССУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЙ.
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НОВЫХ СЕРИЙ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ
ПОСРЕДСТВОМ ПОЛИНОМОВ С.Н. БЕРНШТЕЙНА**

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Используя полиномы С.Н. Бернштейна, разрешается вопрос конструктивной теории функций, относящийся к интегро-дифференциальным уравнениям с частными производными, содержащим производные высшего порядка М. Пиконе.

**DES PROBLÈMES DE LA THÉORIE CONSTRUCTIVE DES FONCTIONS RELATIVES
À UNE NOUVELLE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES. L'APPRO-
XIMATION, PAR LES POLYNÔMES DE S. N. BERNSTEIN, DES SOLUTIONS POUR DE
NOUVELLES SÉRIES DE PROBLÈMES DE CONTOUR**

RÉSUMÉS

En utilisant les polynômes de S. N. Bernstein, on y résout des problèmes de la théorie constructive des fonctions relative aux équations intégral-différentielles à dérivées partielles, ayant les dérivées d'ordre supérieure de M. Picone.

ASUPRA MIȘCĂRII APELOR ARTEZIENE ÎNTR-UN STRAT NEOMOGEN DE TIPUL UNU

Șt. I. GHEORGHITĂ

1. Problema mișcării staționare lineare a apelor arteziene reprezintă un interes practic deosebit. Mediile poroase, în care au loc mișcările lor, sînt în general neomogene, și deci se impune găsirea unor soluții, exacte sau aproximative, cînd coeficientul de filtrație nu e constant în domeniul ocupat de fluid. Problemele de mișcări în medii neomogene prezintă dificultăți suplimentare față de problemele relative la mediile omogene, și de aceea e indicat de a se studia unele cazuri simple care permit găsirea unei soluții analitice cu care să putem descrie mișcarea în cazul concret dat. Aci se urmărește aproximarea unor mișcări plane staționare lineare în medii neomogene de tipul unu, adică, după clasificarea din [1], în medii omogene care conțin domenii impermeabile.

Rezolvarea unor probleme relative la astfel de medii permite aproximarea mișcărilor în medii poroase de tipul II, adică în medii omogene pe porțiuni. Să ne fixăm atenția asupra unui mediu poros care ocupă domeniul D , limitat de curba C formată din două porțiuni de alimentare, C_1 și C_3 , și două porțiuni impermeabile, C_2 și C_4 . Domeniul D îl presupunem format din două subdomenii, D_1 — în care coeficientul de filtrație este k_1 , și D_2 — în care coeficientul de filtrație este k_2 ($\neq k_1$), iar curba γ care îl delimitează pe D_2 nu are nici un punct comun cu C . Dacă ne interesează debitul Q al apei ce se scurge din bazinul în contact cu C_1 spre bazinul în contact cu C_3 , sau viceversa, pentru Q vom obține o limitare superioară și o limitare inferioară, dacă vom considera odată $k_2 = k_1$ și altă dată $k_2 = 0$.

2. Aci ne vom fixa atenția asupra unui caz de mișcare simetrică într-un strat de grosime T practic constantă, cînd C_1 și C_3 sînt apropiate de segmente de dreaptă perpendiculare pe C_2 și C_4 , mediul poros omogen conținînd un mediu impermeabil D limitat de o curbă γ simetrică față de o dreaptă paralelă cu C_2 și C_4 , și care se găsește la $T/2$ față de aceste curbe. Dat fiind simetria admisă, e suficient să considerăm mișcarea într-un dreptunghi de lățime $T/2$, și condițiile la limită se vor putea scrie deci, presupunînd că nivelul fluidului din bazinul în contact cu C_1 e superior nivelului fluidului din bazinul în contact cu C_3 :

$$\left. \begin{aligned} \Psi &= Q/2 & \text{pe } C_2, & \Psi = 0 & \text{pe } c_1 a_0 \gamma_* b_0 c_3, \\ \Phi &= kH/2 & \text{pe } C_1, & \Phi = -kH/2 & \text{pe } C_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

c_1 și c_3 fiind, respectiv, punctul de intersecție al axei de simetrie cu C_1 și C_3 , a_0 și b_0 intersecțiile aceleși axe cu γ , γ_* partea lui γ care se găsește între axa de simetrie și C_2 , iar Φ și Ψ potențialul vitezelor și, respectiv, funcția de curent ale mișcării plane considerate.

Debitul Q ce traversează mediul poros este de forma

$$Q = n^{-1} kH, \quad (2)$$

și problema revine la determinarea coeficientului adimensional n în funcție de forma și dimensiunile lui γ_* .

Astfel formulată, problema se poate reduce la reprezentarea conformă a domeniului limitat de C_2 , C_1 , $c_1 a_0 \gamma_*$, $b_0 c_3$ și C_3 pe dreptunghiul corespunzător mișcării din planul $F = \Phi + i\Psi$ (de ex. [2], p. 10). Pentru a aproxima pe γ_* putem aplica o metodă semiinversă propusă acum câțiva ani [3], dar pentru ușurarea calculelor vom simplifica problema. Să alegem un sistem de axe Oxy cu axa Ox de-a lungul lui $a_0 b_0$, și să presupunem că mediul poros e limitat de razele (∞, a_0) și (b_0, ∞) , curba γ_* și dreapta $y = T/2$. La mari distanțe de γ_* presupunem că avem un curent uniform de viteză v_0 , astfel încât $Q = V_0 T$. Dar la o anumită distanță de γ_* liniile echipotențiale vor fi foarte apropiate de segmente de dreaptă perpendiculare pe Ox , și ne putem mărgini la a considera că pentru o diferență mică între abscisele de intersecție ale unei linii echipotențiale cu dreptele $y = 0$ și $y = T/2$, putem lua cu o bună aproximație acele echipotențiale practic drept segmente de dreaptă paralele cu Oy .

Cum se observă din (2), n este tocmai modulul de formă folosită în metoda fragmentelor a lui N. N. Pavlovski [4]. Pentru a evalua influența neomogenității asupra debitului va fi deci suficient, dacă păstrăm aceiași diferență $(= kH)$ între valorile pe care le ia Φ pe echipotențialele care se găsesc de o parte și de alta a neomogenității la o distanță dată între ele, să evaluăm pe n . Pentru aceasta vom scrie potențialul complex $F(x) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ al mișcării în mediul poros, sub forma

$$F(z) = qf(z), \quad (3)$$

și două echipotențiale să întâlnească o paralelă $y = s$ la axa reală în punctele de abscise $x = x_1$ și, respectiv, $x = x_2$. Din (3) avem deci

$$\Phi(x_j, s) = q\varphi(x_j, s), \quad (j = 1, 2) \quad (4)$$

Impunând ca diferența dintre valorile lui Φ să fie egală cu kH când $x_2 - x_1 = L$, vom putea scrie

$$kH = q[\varphi(x_2, s) - \varphi(x_1, s)]. \quad (5)$$

Modulul de formă are atunci expresia, presupunând, pentru a fixa ideile, că $x_2 > x_1$:

$$n = \varphi(x_2, s) - \varphi(x_1, s), \quad x_2 - x_1 = L. \quad (6)$$

Din (6) decurge modulul de formă cunoscut pentru mișcarea uni-dimensională într-un strat de grosime constantă T . Notînd în acest caz debitul prin q_0 și potențialul complex corespunzător prin $F_0(z)$,

$$F_0(z) = q_0 z T^{-1},$$

deci

$$\Phi_0(x_j, s) = q_0 x_j T^{-1} (j = 1, 2),$$

de unde

$$kH = q_0 L T^{-1},$$

sau

$$q_0 = kH(L/T)^{-1},$$

și regăsim expresia cunoscută

$$n_0 = L T^{-1}.$$

În definitiv raportul q/q_0 va avea expresia

$$\frac{q}{q_0} = \frac{L}{T[\varphi(x_2, s) - \varphi(x_1, s)]}, \quad (7)$$

unde diferența $\varphi(x_2, s) - \varphi(x_1, s)$, în conformitate cu cele spuse, are o valoare practic constantă. Pentru un L relativ mic, cînd $\varphi(x_2, s) - \varphi(x_1, s)$ variază sensibil cu x , raportul $L/T[\varphi(x_2, s) - \varphi(x_1, s)]$, unde $x_2 - x_1 = L$, ne va da o informație locală despre influența neomogenității asupra mișcării fluidului.

Influența neomogeneității s-ar putea exprima însă și altfel. Fie L o lungime de mediu poros omogen prin care trece debitul q_0 . Dacă vrem ca prin mediul neomogen să treacă același debit, atunci pentru aceeași diferență kH între valorile lui Φ pe echipotențialele, extreme, $x_2 - x_1$ va fi $< L_0$; deci stratul neomogen este echivalent cu un strat omogen mai lung. Din (7) rezultă că lungimea L a acestui strat omogen echivalent va fi dat de relația

$$\varphi(x_1 + L, s) = \varphi(x, s) + \frac{L_0}{T}. \quad (8)$$

3. Vom da un exemplu simplu de construcție a lui $F(z)$ prin metoda semi-inversă. Fie o mișcare în domeniul limitat de dreapta $y = T$, razele $(-\infty, M)$ și (N, ∞) și arcul $M\gamma N$, deocamdată necunoscut, M și N fiind puncte de pe axa reală. Să efectuăm o primă reprezentare conformă a benzii $0 < y < T$ pe semiplanul $y_1 > 0$ al variabilei complexe $z_1 = x_1 + iy_1$, astfel încît punctele de la infinit ale benzii să se reprezinte în punctele $z_1 = -1$ și, respectiv, $z_1 = 1$. Atunci relația dintre z și z_1 va fi

$$z = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1 + z_1}{1 - z_1}, \quad z_1 = th \frac{\pi z}{2T}. \quad (9)$$

În planul z_1 să presupunem că arcul $M\gamma N$ se reprezintă ca un arc de cerc $M_1\gamma_1N_1$ de rază R , unde $z_1(M_1) = a$, $z_1(N_1) = b$ ($b > a$, $|a| < 1$, $|b| < 1$), iar tangenta la arc în punctul M_1 face cu axa Ox_1 unghiul θ . Mijlocul segmentului M_1N_1 fiind în punctul B_1 , unde $z_1(B_1) = (a+b)/2$, să trecem la un nou plan z_2 cu originea în B_1 și cu direcția axei reale coincidând cu direcția lui Ox_1 :

$$z_2 = z_1 - \frac{a+b}{2}, \quad z_1 = z_2 + \frac{a+b}{2}. \quad (10)$$

De la semiplanul $y_2 > 0$ minus domeniul cuprins între arcul de cerc $M_2\gamma_2N_2$, unde $z_2(M_2) = -\frac{a-b}{2}$, $z_2(N_2) = \frac{a-b}{2}$, și axa reală, să trecem la o bandă din planul z_3 , M_2 și N_2 corespunzând punctelor de la infinit ale benzii. Notînd $\frac{a-b}{2} = c$, vom avea

$$z_3 = \ln \frac{c+z_2}{c-z_2}, \quad z_2 = c \operatorname{th} \frac{z_3}{2}, \quad (11)$$

alegînd determinația logaritmului astfel ca z_3 să fie pur imaginar pentru $z_2 = 0$. În planul z_3 arcului γ_2 îi va corespunde dreapta (D_1) $z_3 = x_3 + i\theta$, iar razelor $(-\infty, M_2)$ și (N_2, ∞) dreapta (D_2) $z_3 = x_3 + i\theta$. Făcînd o translație astfel încît (D_1) să coincidă cu axa reală a unui nou plan z_4 , avem

$$z_4 = z_3 - i\theta, \quad z_3 = z_4 + i\theta. \quad (12)$$

În fine, să trecem de la banda $0 < y < \pi - \theta$ la semiplanul $y_5 > 0$ al variabilei $z_5 = x_5 + iy_5$, astfel încît punctelor de la infinit ale benzii să le corespundă punctele -1 și 1 ; aceasta se face prin relațiile

$$z_4 = \frac{\pi - \theta}{\pi} \ln \frac{1+z_5}{1-z_5}, \quad z_5 = \operatorname{th} \frac{\pi z_4}{2(\pi - \theta)}. \quad (13)$$

Din (9)–(13) rezultă legătura dintre z și z_5 :

$$z = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1 + \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \operatorname{th} \left(\frac{i\theta}{2} + \frac{\pi - \theta}{2} \ln \frac{1+z_5}{1-z_5} \right)}{1 - \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \operatorname{th} \left(\frac{i\theta}{2} + \frac{\pi - \theta}{2} \ln \frac{1+z_5}{1-z_5} \right)}. \quad (14)$$

Arcul $M\gamma N$ din planul z se va reprezenta astfel parametric în funcție de valorile reale pe care le ia z_5 în intervalul $(-1, 1)$. În particular, din (14), sau direct din (9), extremitățile arcului vor avea afixe

$$z_M = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1+a}{1-a}, \quad z_N = \frac{T}{\pi} \ln \frac{1+b}{1-b}, \quad (15)$$

Să scriem acum potențialul complex al mișcării sub forma (3). Pentru aceasta e suficient să observăm că în imaginile din planul z_5 ale punctelor de la infinit din planul fizic trebuie să avem singularități logaritmice; dacă notăm cu A_5 și B_5 acele puncte, avem $\text{Im} \{f(z_5)\} = 0$ pe segmentul $A_5 B_5$ al axei reale și $\text{Im} \{f(z_5)\} = q$ pe restul aceleiași axe. Urmează că

$$F(z_5) = \frac{q}{\pi} \ln \frac{z_5 - z_5(A_5)}{z_5(B_5) - z_5}, \quad (16)$$

unde se ia determinația logaritmului care e reală pentru $z_5 = 0$. Cum relația dintre z_5 și z se poate obține tot din (9) — (14),

$$z_5 = th \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \left[\ln \frac{th \frac{\pi z}{2T} - a}{b - th \frac{\pi z}{2T}} - i\theta \right], \quad (17)$$

iar

$$z_5(A_5) = cth \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \ln \frac{1+a}{1+b}, \quad z_5(B_5) = cth \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \ln \frac{1-a}{1-b},$$

avem deci pentru potențialul complex exprimat în funcție de z :

$$F(z) = \frac{q}{\pi} \ln \frac{th \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \left[\ln \frac{th \frac{\pi z}{2T} - a}{b - th \frac{\pi z}{2T}} - i\theta \right] - cth \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \ln \frac{1+a}{1+b}}{cth \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \ln \frac{1-a}{1-b} - th \frac{\pi}{2(\pi - \theta)} \left[\ln \frac{th \frac{\pi z}{2T} - a}{b - th \frac{\pi z}{2T}} - i\theta \right]}. \quad (18)$$

Din această expresie rezultă că $\varphi \rightarrow \pm \infty$ când $x \rightarrow \pm \infty$, cum era de așteptat. Viteza complexă se deduce aum ușor din (18), și de asemenea și repartiția presiunilor. Cît privește liniile echipotențiale și liniile de curent, ele se pot afla din (14) și (16); pentru asta din (16) se scoate z_5 în funcție de F ,

$$z_5 = \frac{1 + e^{\frac{\pi F}{q}}}{e^{\frac{\pi F}{q}} cth \frac{\pi}{\pi - \theta} \ln \frac{1-a}{1-b} + cth \frac{\pi}{\pi - \theta} \ln \frac{1+a}{1-b}}, \quad (19)$$

și acum înlocuind (19) în (14) avem pe z în funcție de F . Ecuațiile parametrice ale liniilor de curent, de exemplu, se vor afla scriind că partea imaginară a lui F are o valoare dată între 0 și $q/2$ iar partea reală variază de la $-\infty$ la ∞ .

4. Atît z ca funcție z_5 , cît și potențialul complex depind de parametrilor a , b și θ . Dînd acestor parametri valori convenabile, se poate aproxima un arc $M\gamma N$ dat. Acum să construim efectiv arcul $M\gamma N$ în două cazuri particulare. Pentru aceasta în prealabil să notăm

$$\left. \begin{aligned} U &= U(\theta; x_5) = \operatorname{sh} \left(\frac{\pi - \theta}{\pi} \ln \frac{1 + x_5}{1 - x_5} \right) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\pi - \theta}{\pi} \ln \frac{1 + x_5}{1 - x_5} \right) + \cos \theta \right], \\ V &= V(\theta; x_5) = \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\pi - \theta}{\pi} \ln \frac{1 + x_5}{1 - x_5} \right) + \cos \theta \right]^{-1} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

și atunci

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{T}{2P} \ln \frac{\{4 - [b + a + (b - a)U]^2 - (b - a)^2 V^2\}^2 + 16(b - a)^2 V^2}{\{[2 - b - a - (b - a)U]^2 + (b - a)^2 V^2\}^2}, \\ y &= \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4(b - a)V}{4 - [b + a + (b - a)U]^2 - (b - a)^2 V^2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

a) Cînd $\theta = \pi/2$, atunci din (20) se obține $U = x_5$, $V = \sqrt{1 - x_5^2}$, și să luăm $a = -1/4$, $b = 3/4$, astfel încît $b - a = 1$, $b + a = 1/2$. Ecuațiile parametrice ale lui $M\gamma N$ se scriu ușor din (21); de altfel relațiile corespunzătoare se pot obține și pe altă cale.

b) Cînd $\theta = \frac{\pi}{4}$, din (20)

$$U = \operatorname{sh} \left(\frac{3}{4} \ln \frac{1 + x_5}{1 - x_5} \right) \left[\operatorname{ch} \left(\frac{3}{4} \ln \frac{1 + x_5}{1 - x_5} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right],$$

$$V = \frac{\sqrt{2}}{2 \operatorname{ch} \left(\frac{3}{4} \ln \frac{1 + x_5}{1 - x_5} \right) + \sqrt{2}},$$

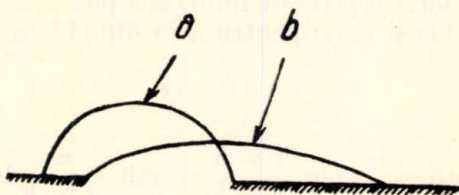


Fig. 1

și luăm $a = 0$ și $b = 0,9$.

Acste două cazuri sînt reprezentate în figura alăturată.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Șt. I. Gheorghită: Contribuții la studiul mișcărilor în mediile poroase, Studii și Cerc. Mat., tom VI, nr. 3-4, 1955, p. 273
- [2] Șt. I. Gheorghită: Capitole din teoria mișcărilor în mediile poroase, București 1957
- [3] Șt. I. Gheorghitza: A semi-inverse method in plane hydrodynamics, Arch. Mech. Stosowanej, tom XI, nr. 6, 1959, p. 681
- [4] A. M. Senkov, P. F. Filciakov: Priblijennije metodî rascieta saționarnovo dvijenia gruntovih vod pod ghidrotehničeskimi soorujeniami, Kiev 1952.

О ДВИЖЕНИИ АРТЕЗИАНСКИХ ВОД В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ПЕРВОГО ТИПА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Рассматривается плоское линейное стационарное движение в однородном пористом слое, который содержит некоторую непроницаемую среду, предполагая, что движение симметрично относительно какой-нибудь оси, а кривые питания являются практически прямолинейными и перпендикулярными к этой оси. После некоторых рассуждений, касающихся влияния неоднородности, показывается как с помощью некоторого полубратного метода, разработанного автором в [3], можно определить комплексный потенциал движения.

SUR LE MOUVEMENT DES EAUX ARTESIENNES DANS UN MILIEU NON-HOMOGÈNE DU PREMIER TYPE

RÉSUMÉ

On considère le mouvement stationnaire linéaire plan, dans une couche poreuse homogène, qui contient un milieu imperméable, admettant que le mouvement a une axe de symétrie, tandis que les courbes d'alimentation sont pratiquement rectilignes et perpendiculaires à cette axe. Après quelques considérations concernant l'influence de la non-homogénéité, on montre comment, à l'aide d'une méthode demi-inverse développée antérieurement par l'auteur, on peut déterminer le potentiel complexe du mouvement.

DETERMINAREA REFRAȚIEI ASTRONOMICE PE BAZA UNOR MĂSURI RECENTE ALE DENSITĂȚII ATMOSFERICE OBTINUTE CU AJUTORUL RACHETELOR ȘI SATELIȚILOR ARTIFICIALI

NICOLAE DINULESCU

Integrala refracției astronomice este :

$$R = \int_1^{n_0} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n} \quad (1)$$

unde z și n sînt respectiv unghiul de incidență și indicele de refracție pentru un strat oarecare al atmosferei pămîntului de rază r . Integrala (1) este dedusă în ipoteza stratificării sferice a atmosferei, iar cele trei variabile sînt cuprinse între limitele date mai jos (cei doi indici referindu-se la suprafața pămîntului și la limita superioară a atmosferei).

$r_0 \leq r \leq r_1$ $r_0 = 6371,210$ km (raza medie a pămîntului presupus sferic).

$z_0 \leq z \leq z_1$

$n_0 \leq n \leq 1$ $n_0 = 1,000\ 27740$ (pentru $\lambda = 0^\mu$, 575 , $t = +15^\circ\text{C}$, $p = 760$ mm de mercur).

Utilizînd proprietatea de invarianță

$$nr \sin z = n_0 r_0 \sin z_0$$

integrala (1) se poate scrie sub forma

$$R = \int_1^{n_0} \frac{\frac{r_0}{r} \cdot \frac{n_0}{n} \sin z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \cdot \frac{n_0}{n}\right)^2 \sin^2 z_0}} \frac{dn}{n}$$

și înlocuind sub radical 1 prin $\sin^2 z_0 + \cos^2 z_0$ și împărțind ambii termeni ai fracției cu $\sin z_0$, se obține

$$R = \operatorname{tg} z_0 \int_1^{n_0} \frac{\frac{r_0}{r} \cdot \frac{n_0}{n}}{\sqrt{1 + \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{n_0^2}{n^2}\right) \operatorname{tg}^2 z_0}} \frac{dn}{n} \quad (2)$$

Punînd $1 - \frac{r_0^2}{r^2} \cdot \frac{n_0^2}{n^2} = 2u$, unde $0 \leq 2u < 2u_1 = 1 - n_0^2 \cdot \frac{r_0^2}{r^2}$ ținînd seama că produsul $2u \operatorname{tg}^2 z_0$ rămîne mic pentru $z_0 < 70^\circ$ dezvoltarea în serie a expresiei de sub radical e justificată și deci

$$(1 + 2u \operatorname{tg}^2 z_0)^{-\frac{1}{2}} = 1 - u \operatorname{tg}^2 z_0 + \frac{3}{2} u^2 \operatorname{tg}^4 z_0 \dots$$

și (2) ia forma — la numărător expresia $\frac{n_0}{n} \cdot \frac{dn}{n}$ fiind înlocuită cu $\frac{n_0^2}{n^2} d\left(\frac{n}{n_0}\right)$

$$R = A \operatorname{tg} z_0 - B \operatorname{tg}^3 z_0 + C \operatorname{tg}^5 z_0 \dots \quad (3)$$

unde

$$A = \int_{\frac{1}{n_0}}^1 \frac{r_0}{r} \cdot \frac{n_0^2}{n^2} d\left(\frac{n}{n_0}\right); B = \int_{\frac{1}{n_0}}^1 u \frac{r_0}{r} \cdot \frac{n_0^2}{n^2} d\left(\frac{n}{n_0}\right), \text{ etc.} \quad (4)$$

Calculul integralelor (4), etc. este posibil numai dacă este cunoscută relația dintre n și r adică modul de variație al densității atmosferice cu înălțimea, ceace a dus la adoptarea a diferite ipoteze privind structura atmosferei în vederea efectuării calculului acestor integrale, ipotezele cele mai cunoscute fiind acelea al lui Newton, Bouguer și Laplace.

În această lucrare ne-am propus să determinăm numeric cei doi termeni A și B din seria (3) — formula refracției limitată la aceste două constante este cunoscuta relație ale lui Laplace — bazîndu-ne pe datele cele mai recente privind densitatea atmosferei obținute prin rachete și sateliți artificiali. Menționăm că în ultimii ani s-au făcut unele încercări în această direcție ca aceea al lui R. Kasanin (8) în 1958, iar în 1962 Salvatore Leone (9) calculează coeficienții A și B folosind un model de atmosferă numit $TSA - 60$ — Tentative Standard Atmosphere 1960 — rezultat din cercetările spațiului cosmic de către savanții sovietici și prezentat la Congresul COSPAR în 1961.

Modelul de atmosferă ales de noi e cel publicat de C. W. Allen în „Astrophysical Quantities”, ediția II-a (1963) și e dat în tabela de mai jos :

TABELA I

$\frac{h}{\text{km}}$	$\frac{\delta}{\text{g/cm}^3}$	8	5,2966.10 ⁻⁴	60	3,3113.10 ⁻⁷
0	1,1150.10 ⁻³	10	4,1495	70	9,3325.10 ⁻⁸
1	1,1092	20	8,8921.10 ⁻⁵	80	2,0417.10 ⁻⁸
2	1,0000	30	1,7989		
3	9,0782.10 ⁻⁴				
4	8,1847	40	4,0179.10 ⁻⁶		
5	7,3791	50	1,0592.10 ⁻⁶		
6	6,6527.10 ⁻⁴				

Acest model este destul de extins — densitățile sînt date pînă la 1 000 km. însă noi ne-am oprit la $h = 80$ km, ca limita superioară a atmo-

sferei deoarece straturile superioare acestei înălțimi contribuie la o refracție cu mai puțin de 0,005, chiar pentru $z_0 = 75^\circ$, cantitate ce e și mai mică pentru $z_0 = 75^\circ$; printr-un calcul simplu se găsește $h = 79$ km. ca înălțime limită.

În aceste condiții (1) se poate scrie astfel :

$$R = \int_1^{n_0} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n} = \int_1^{n'} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n} + \int_{n'}^{n_0} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n} \quad (5)$$

n' fiind o valoare în intervalul $(1, n_0)$. Așa cum am arătat mai înainte se poate determina valoarea lui δ' , așa ca integrala 1^a din (5) să fie mai mică ca 0'', 005, adică

$$\int_1^{n'} \operatorname{tg} z \frac{dn}{n} < 2 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \quad (6)$$

de unde se deduce $\delta' < 2 \cdot 9 \cdot 10^{-8}$, ceea ce pentru modelul nostru de atmosferă dă înălțimea $h \sim 79$ km., deasupra căreia are loc (6). Integralele (4) se pot scrie

$$A = \int_{\frac{n'}{n_0}}^1 \frac{r_0}{r} \cdot \frac{n_0^2}{n^2} d\left(\frac{n}{n_0}\right); \quad B = \int_{\frac{n'}{n_0}}^1 u \frac{r_0}{r} \cdot \frac{n_0^2}{n^2} d\left(\frac{n}{n_0}\right) \quad (7)$$

Cu acest grad de aproximație rezultă deci să sîntem îndreptățiți să luăm pentru calculul integralelor ce dau pe A și B valorile lui $n' \sim 1$ și r' pentru $h = 80$ km.; la această înălțimea n' diferă de 1 numai cu cantitatea $4,6 \cdot 10^{-9}$, destul de mică, așa cum rezultă din relația lui Gladstone, aplicată modelului nostru :

$$\frac{n-1}{\delta} = \frac{n_0-1}{\delta_0} \rho_0 = 0,22645 \quad (\delta_0 = 1,2250 \cdot 10^{-3}, n_0 = 1,00027740) \quad (8)$$

Integrînd prin părți (7) obținem :

$$A = -1 + n_0 \frac{r_0}{r'} + \int_1^{r'} \frac{n_0}{n} \cdot \frac{r_0^2}{r^2} d\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (9)$$

$$B = \frac{A}{2} + \frac{1}{6} \left(1 - n_0^3 \frac{r_0^3}{r'^3}\right) - \frac{1}{2} \int_1^{r'} \frac{n_0^3}{n^3} \frac{r_0^4}{r^4} d\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

Din relația (8) se are

$$\frac{n_0}{n} = n_0(1 + \rho_0 \delta)^{-1} = n_0(1 - \rho_0 \delta + \rho_0^2 \delta^2)$$

$$\frac{n_0^3}{n^3} = n_0^3(1 + \rho_0 \delta)^{-3} = n_0(1 - 3\rho_0 \delta + 6\rho_0^2 \delta^2)$$

iar ultimii termeni din (9) devin

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \frac{n_0}{n} \cdot \frac{r_0^2}{r^2} d\left(\frac{r}{r_0}\right) &= n_0 \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \frac{r_0^2}{r^2} d\left(\frac{r}{r_0}\right) - \rho_0 n_0 \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \delta \cdot \frac{r_0^2}{r^2} d\left(\frac{r}{r_0}\right) + \rho_0^2 n_0 \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \delta^2 \cdot \frac{r_0^2}{r^2} d\left(\frac{r}{r_0}\right) \\ &- \frac{1}{2} \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \frac{n_0^3}{n^3} \frac{r_0^4}{r^4} d\left(\frac{r}{r_0}\right) = -\frac{n_0^3}{6} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) + \frac{3}{2} \rho_0 n_0^3 \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \delta \cdot \frac{r_0^4}{r^4} d\left(\frac{r}{r_0}\right) - \\ &- 3 \rho_0^2 n_0^3 \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \delta^2 \cdot \frac{r_0^4}{r^4} d\left(\frac{r}{r_0}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Ultimii termeni din aceste expresii se pot neglija avînd valori foarte mici; printr-un calcul orientativ (se împarte atmosfera în două straturi după înălțimi cu limitele (0–30; 30–80 km) se deduce:

$$\rho_0^2 n_0 \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \delta^2 \cdot \frac{r_0^4}{r^4} d\left(\frac{r}{r_0}\right) < 3 \cdot 10^{-10}; \quad 3 \rho_0^2 n_0^3 \int_1^{\frac{r'}{r_0}} \delta^2 \cdot \frac{r_0^4}{r^4} d\left(\frac{r}{r_0}\right) < 9 \cdot 10^{-10} \quad (11)$$

Rezultă deci că valorile lui A și B sînt următoarele și luînd ca variabilă pe r :

$$A = n_0 - 1 - \rho_0 n_0 r_0 \int_{r_0}^{r'} \delta \frac{dr}{r^2} \quad (12)$$

$$B = \frac{1}{2} (n_0 - 1) - \frac{1}{6} (n_0^3 - 1) - \frac{1}{2} \rho_0 n_0 r_0 \int_{r_0}^{r'} \delta \frac{dr}{r^2} + \frac{3}{2} \rho_0 n_0^3 r_0^3 \int_{r_0}^{r'} \delta \frac{dr}{r^4}.$$

Cele două integrale din (12) se pot calcula numeric după cum urmează: se consideră atmosfera divizată în 16 straturi concentrice corespunzătoare înălțimilor din tabelul I și deci cele două integrale vor fi descompuse fiecare în 16 integrale parțiale corespunzătoare straturilor respective; deoarece variația lui δ pentru stratul respectiv este destul de mică pentru fiecare strat se va putea lua pentru densitate valoarea ei medie, calculată după formula

$$\bar{\delta} = \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{\ln \frac{\delta_i}{\delta_{i+1}}}, \quad (13)$$

indicii referindu-se la densitățile corespunzătoare celor două înălțimi extreme ale stratului respectiv; această formulă a fost dedusă de I. A. Hvosnikov (10), ținîndu-se seama că densitatea se poate exprima prin $\delta(h) = \delta_i e^{-ch}$, unde $h_i \leq h \leq h_{i+1}$ iar b e o constantă pentru stratul respectiv.

Efectuind aceste calcule găsim ca valori în radiani :

$$A = 0,00027740 - 0,000.00037 = + 0,00027703$$

$$B = 0,00013870 - 0,00013874 - 0,00000018 + 0,00000055 = (14) \\ = + 0,00000033.$$

iar în secunde de arc

$$A = 57'', 142, B = 0'', 068 \quad (15)$$

Aceste valori sînt aproape identice cu cele găsite de S. Leone în lucrarea menționată mai înainte.

Astronomul italian utilizînd modelul TSA-60 deduce pentru constantele A și B formule similare celor de la (9) și divizînd atmosfera în straturi de grosime corespunzătoare diferențelor celor două înălțimi successive din modelul ales calculează integralele (9) substituind valorii

$\frac{n}{n^0}$ din fiecare strat valoarea ei maximă și cea minimă în intervalul corespunzător și deduce valorile integralelor; luînd apoi media aritmetică a tuturor acestor sume, el găsește pentru A și B valorile $57'', 142$ și $0'', 0,67$.

În lucrarea noastră am dat integralelor din (12) o formă în care variabila δ apare explicit sub integrale și pentru a compara rezultatele cu cele ale lui Leone am luat aceeași valoare pentru n_0 .

Potrivit valorilor noastre, formula refracției normale — $t = 0^\circ\text{C}$, $P = 760$ mm de mercur — devine

$$R = 60'', 281 \operatorname{tg} z_0 - 0'', 067 \operatorname{tg}^3 z_0 \quad (16)$$

Formula (16) este suficientă în practică — așa cum este bine știut pentru $z_0 < 70^\circ$. Din tabela II se constată că refracțiile calculate cu formula (16) sînt sensibil egale cu cele date de R. Radau (5), din coloana III-a, astronomul francez calculînd tabelele sale de refracție normală luînd pentru constanta de refracție valoarea $60'', 4455$.

TABELUL II

z_0	R calculat	R Radau
0	0'',00	0'',00
10	10,65	10,65
20	21,97	21,98
30	34,85	34,86
40	50,63	50,64
50	71,89	71,86
60	104,24	104,26
70	164,65	164,58
80	222,11	222,07

Din determinarea constantelor A și B din formula lui Laplace deduse prin considerarea modelelor de atmosferă construite pe baza măsurătorilor recente ale densității atmosferei cu ajutorul rachetelor

și sateliților artificiali se constată că valorile constantelor A și B din formula lui Laplace sînt foarte apropiate de cele deduse anterior, care au fost determinate fără a se face vreo ipoteză asupra legii de distribuție a densității în atmosferă.

BIBLIOGRAFIE

- [1] N. Coculescu: Curs de astronomie, 1929.
- [2] A. Danjon: Astronomie generală (în l. franceză), 1959.
- [3] C. N. Blajko: Curs de astronomie sferică (în limba rusă), 1954
- [4] E. Vassy: Fizica atmosferei, tom I și II (în l. franceză) 1956—1959.
- [5] R. Radau: Analele Observatorului din Paris, tomul XIX, 1889.
- [6] C. P. Kuiper și alții: Pămîntul ca planetă (în limba engleză) 1954.
- [7] C. W. Allen: Cantități astrofizice (în l. engleză) 1963
- [8] R. Kasanin: Refracția astronomică mijlocie. Note și lucrări ale secției de astronomie din Institutul de matematică al Academiei de științe Sirbe (în l. franceză) 1958.
- [9] S. Leone: Determinarea constantelor refracției pe baza modelului de atmosferă TSA-60. Publicațiile Observatorului din Palermo, volum X — Nr. 18 și 19 din 1962 (în l. italiană)
- [10] I. A. Hbostikov: Fizica ozonoferei și ionosferei (limba rusă), 1963.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ НА ОСНОВании НОВЕЙШИХ ИЗМЕРЕНИЙ АТМОСФЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ РАКЕТ И ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей работе берётся модель атмосферы, предложенная К. В. Алленом и опубликованная в „Astrophysical Quantities” во втором выпуске (1963 г.), составленная на основе новейших измерений атмосферной плотности с помощью ракет и искусственных спутников.

Показывая, что для вычисления нормальной рефракции можно пренебречь атмосферными слоями, высота которых превосходит 80 км., с ошибкой рефракции меньше $0''005$, автор проводит вычисление обеих констант формулы Лапласа A и B , установив соответственные результаты $57''142$ и $0''068$.

Метод, использованный для вычисления интегралов, входящих в выражения, которые дают A и B , состоит в разделении атмосферы на 16 концентрических слоёв, соответствующих высотам.

Для плотности каждого слоя берётся его среднее значение. Таким образом, достигается численное вычисление 32 интегралов; определённые значения для A и B очень близки к значениям найденным С. Леоне, который использует модель атмосферы T.A.S.—60, предложенную профессором А. А. Благоврадовым на съезде С.О.С.П.А.Р., состоявшемся во Флоренции, в апреле 1961 года.

DÉTERMINATION DE LA RÉFRACTION ASTRONOMIQUE SUR LA BASE DES MESURES RÉCENTES DE LA DENSITÉ ATMOSPHÉRIQUE OBTENUES À L'AIDE DES FUSÉES ET SATELLITES ARTIFICIELS

RÉSUMÉ

On considère un modèle d'atmosphère proposé par C. W. Allen et publié dans „Astrophysical Quantities”, deuxième édition (1963).

Ce modèle est basé sur les mesures récentes de la densité atmosphérique obtenues à l'aide des fusées et satellites artificiels.

Après avoir montré que pour le calcul de la réfraction normale on peut négliger les couches dont la hauteur dépasse 80 km, l'erreur sur la réfraction étant moindre que $0'',005$, l'auteur déduit pour les deux constantes A et B de la formule de Laplace les valeurs $57'',142$ et $0'',068$ respectivement.

La méthode utilisée pour le calcul des intégrales qui entrent dans les expressions des constantes A et B consiste à diviser l'atmosphère en 16 couches concentriques correspondants aux hauteurs du modèle considéré en prenant pour la densité de chaque couche sa densité moyenne. Effectuant le calcul numérique de ces 32 intégrales, l'auteur déduit les valeurs de A et B très approchées de celles trouvées par S. Leone, qui a utilisé dans ce but le modèle d'atmosphère TSA-60, proposé par le professeur A. A. Blagonravov au congrès COSPAR qui a eu lieu à Florence (Italie) en avril 1961.

CORESPONDENTE ÎNTRE SPAȚII AFINE CU CONEXIUNE POLINOMIALĂ ȘI TRANSFORMĂRILE CREMONIENE ÎNTREGI *)

ION D. TEODORESCU și NICOLAE I. NEDIȚĂ

O transformare invertibilă

$$u^i = u^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

se zice *cremoniană întreagă* dacă u^i sînt polinoame și dacă transformarea inversă este de asemenea dată prin polinoame.

Prof. Gh. Vrănceanu [1] a arătat că oricărei transformări cremoniene întregi (1) i se poate asocia un spațiu $A_n(x^1, \dots, x^n)$ cu conexiune afină polinomială, local euclidian și cu conexiune contractată nulă, echivalent în mare cu spațiul afin $E_n(u^1, u^2, \dots, u^n)$. Reciproca nu este adevărată, aceasta fiind arătată, în cazul $n = 2$, printr-un exemplu [2]. Rezultă ([3], p. 386) că cercetarea transformărilor cremoniene întregi revine la determinarea spațiilor cu conexiune polinomială, local euclidiene și avînd conexiunea contractată nulă și a vedea apoi care dintre ele corespund unor astfel de transformări.

Pentru cazul $n = 2$, acest studiu a fost realizat [4], demonstrîndu-se totodată — pe această cale geometrică — o teoremă a lui *Yung* referitoare la transformările cremoniene întregi.

În această notă considerăm cazurile ce se pot prezenta pentru un spațiu cu trei dimensiuni atunci cînd spațiul este raportat la un sistem de curbe coordonate cu trei sau două din familiile de curbe coordonate constituite din curbe autoparalele. Rămîne de considerat cazul cînd numai una din familiile de curbe coordonate este constituită din curbe autoparalele sau cazul general cînd curbele coordonate (la care este raportat spațiul A_3) nu sînt curbe autoparalele.

★

*) Comunicare prezentată la a doua sesiune științifică a Institutului Pedagogic din București (25–26 aprilie 1964).

Un spațiu $A_n(x^1, \dots, x^n)$ cu conexiune afină Γ_{jk}^i este local euclidian dacă spațiul este fără torsiune și cu paralelism absolut, adică tensorii de torsiune și de curbura sînt nuli:

$$\begin{aligned} T_{jk}^i &= \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i = 0 \\ \Gamma_{jke}^i &= \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^e} - \frac{\partial \Gamma_{je}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{rk}^i \Gamma_{je}^r - \Gamma_{re}^i \Gamma_{jk}^r = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Atunci există un sistem de coordonate afine $u^2, \dots, u^n$ astfel încît în acest sistem de coordonate, componentele conexiunii să fie nule; cu alte cuvinte, transformarea punctuală (1) este constituită din n soluții independente ale sistemului complet integrabil

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial V}{\partial x^i} = 0 \quad (3)$$

Deci, determinarea spațiilor local euclidiene A_n cu conexiune afină se reduce la integrarea sistemului (2), iar obținerea transformării punctuale (1) ce aplică spațiul $A_n(x^2, \dots, x^n)$ în sau pe spațiul afin $E_n(u^1, \dots, u^n)$ depinde de determinarea a n soluții independente ale sistemului de ecuații cu derivate parțiale (3).

Se știe că tensorul de curbură Γ_{jke}^i al spațiului A_n cu conexiune afină simetrică satisface relațiile

$$\Gamma_{jke}^i + \Gamma_{jek}^i = 0, \quad \Gamma_{jke}^i + \Gamma_{kej}^i + \Gamma_{ekj}^i \equiv 0$$

Deci, numărul componentelor Γ_{jke}^i distincte ale tensorului de curbură al spațiului A_n este cel mult

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - n C_n^3 = \frac{n^2(n^2-1)}{3}$$

Acest maxim nu este atins dacă tensorul de curbură satisface anumite condiții. De exemplu, dacă conexiunea contractată $\Gamma_k = \Gamma_{ik}^i$ derivă dintr-un potențial, adică $\Gamma_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}$; atunci componentele tensorului de curbură satisfac condițiile

$$\Gamma_{ike}^i \equiv 0, \quad \Gamma_{jik}^i - \Gamma_{kij}^i = 0$$

în număr de $\frac{n(n-1)}{2}$ dacă $n = 2$ și $n(n-1)$ dacă $n \geq 3$.

Deci, dacă $n \geq 3$, numărul componentelor Γ_{jke}^i distincte este cel mult

$$\frac{n(n-1)(n^2+n-3)}{3}$$

Pe de altă parte, spațiul local euclidian A_n fiind fără torsiune și ținînd seama că din $\Gamma_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}$ putem exprima pe $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{22}^2, \dots, \Gamma_{nn}^n$ în funcție de celelalte componente ale conexiunii și de f , rezultă că sînt

$$\frac{n^2(n+1)}{2} - (n-1) = \frac{n^3 + n^2 - 2n + 2}{2}$$

componente Γ_{jk}^i distincte.

Deci rezultă :

Determinarea spațiilor local euclidiene A_n cu conexiune afină, dacă $n \geq 3$, depinde de integrarea unui sistem cu cel mult $\frac{n(n-1)(n^2+n-3)}{3}$

ecuații cu derivate parțiale în $\frac{n^3 - n^2 - 2n + 2}{2}$ funcții necunoscute.

Dacă spațiul este cu conexiune contractată nulă, atunci sînt cel mult $\frac{n(n-1)(n+2)}{2}$ funcții necunoscute de care depinde determinarea conexiunii spațiului A_n .

★

Fie $A_3(x, y, z)$ un spațiu cu conexiune polinomială Γ_{jk}^i local euclidian și cu conexiune contractată $\Gamma_k = \Gamma_{ik}^i$ nulă.

Vom spune că spațiul A_3 este cu *conexiune polinomială*, dacă există un sistem de coordonate x, y, z , în care componentele $\Gamma_{jk}^i(x, y, z)$ ale conexiunii să fie polinoame în variabilele x, y, z .

Deci, determinarea acestor spații depinde de integrarea unui sistem de 18 ecuații cu derivate parțiale în 15 necunoscute. Astfel, putem reduce determinarea spațiilor A_3 la găsirea soluțiilor sistemului

$$\begin{aligned} \Gamma_{112}^1 &= \Gamma_{113}^1 = \Gamma_{212}^1 = \Gamma_{223}^1 = \Gamma_{312}^1 = \Gamma_{313}^1 = \Gamma_{323}^1 = 0 \\ \Gamma_{112}^2 &= \Gamma_{113}^2 = \Gamma_{212}^2 = \Gamma_{223}^2 = \Gamma_{312}^2 = \Gamma_{323}^2 = 0 \\ \Gamma_{112}^3 &= \Gamma_{113}^3 = \Gamma_{212}^3 = \Gamma_{223}^3 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

în necunoscutele

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1, \Gamma_{22}^1, \Gamma_{13}^1, \Gamma_{23}^1, \Gamma_{33}^1, \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{13}^2, \Gamma_{23}^2, \Gamma_{33}^2, \\ \Gamma_{11}^3, \Gamma_{12}^3, \Gamma_{22}^3, \Gamma_{13}^3, \Gamma_{23}^3 \end{aligned} \quad (4')$$

Spațiul local euclidian A_3 cu conexiune contractată nulă va avea conexiunea

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3, & \Gamma_{11}^2, & & \Gamma_{11}^3 \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2, & \Gamma_{12}^3 &= \Gamma_{21}^3 \\ \Gamma_{22}^1 &= & \Gamma_{22}^2 &= -\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{32}^3, & \Gamma_{22}^3 &= \\ \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1, & \Gamma_{13}^2 &= \Gamma_{31}^2, & \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 \\ \Gamma_{23}^1 &= \Gamma_{32}^1, & \Gamma_{23}^2 &= \Gamma_{32}^2, & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 \\ \Gamma_{33}^1 &= & \Gamma_{33}^2 &= & \Gamma_{33}^3 &= -\Gamma_{13}^1 - \Gamma_{23}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

★

Să presupunem că spațiul A_3 este raportat la un sistem de curbe coordonate constituit din curbe autoparalele. În acest caz avem

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11}^3 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^3 = 0, \quad \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0 \quad (6)$$

Deci sistemul (4) depinde numai de necunoscutele

$$\Gamma_{12}^1, \Gamma_{13}^1, \Gamma_{23}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{13}^2, \Gamma_{23}^2, \Gamma_{12}^3, \Gamma_{13}^3, \Gamma_{23}^3, \quad (6')$$

cel puțin una din ele fiind diferită de zero.

Să presupunem că numai una din componentele (6') este nenulă. În acest caz, abstracție făcând de o transformare de forma

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & x' = y, \quad y' = z, \quad z' = x; \\ \beta) \quad & x' = z, \quad y' = x, \quad z' = y; \\ \gamma) \quad & x' = y, \quad y' = x, \quad z' = z; \\ \delta) \quad & x' = z, \quad y' = y, \quad z' = x; \\ \varepsilon) \quad & x' = x, \quad y' = z, \quad z' = y, \end{aligned} \quad (7)$$

sînt numai două posibilități:

$$\Gamma_{12}^1 \neq 0 \quad \text{sau} \quad \Gamma_{23}^1 \neq 0$$

În primul caz, sistemul (4) devine

$$\Gamma_{112}^1 = -\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x} = 0, \quad \Gamma_{212}^1 = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial y} - 2(\Gamma_{12}^1)^2 = 0, \quad \Gamma_{223}^2 = -\frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial z} = 0;$$

acest sistem nu admite soluție polinomială.

În celălalt caz, sistemul (4) se reduce la

$$\Gamma_{223}^1 = -\frac{\partial \Gamma_{23}^1}{\partial y} = 0, \quad \Gamma_{312}^1 = -\frac{\partial \Gamma_{23}^1}{\partial x} = 0, \quad \Gamma_{323}^1 = \frac{\partial \Gamma_{23}^1}{\partial z} = 0$$

Deci sistemul admite soluția polinomială $\Gamma_{23}^1 = \text{const.}$ Printr-o afinitate obținem spațiul A_3 avînd coeficienții de conexiune toți nuli afară de

$$\Gamma_{23}^1 = 1. \quad (8)$$

Este un spațiu A_3 cu conexiune constantă, determinat de *P. Mocanu* [5].

Pentru această conexiune, sistemul (3) se scrie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \end{aligned}$$

Soluția generală a acestui sistem este

$$V = k_1(x - yz) + k_2y + k_3z + k_4$$

Obținem că transformarea asociată conexiunii (8) este

$$u = x - yz, \quad v = y, \quad w = z, \quad (8')$$

fiind o transformare cremoniană întreagă.

Procedînd astfel, obținem rezultatul:

Există spații local euclidiene A_3 cu conexiune contractată nulă, raportate la un sistem de curbe coordonate constituit din curbe autoparalele, care să aibă conexiunea polinomială.

Conexiunea unui astfel de spațiu poate fi redusă la forma (8), transformarea asociată (8') fiind cremoniană întreagă.

★

Să considerăm cazul cînd spațiul A_3 este raportat la un sistem de curbe coordonate cu două din familiile de curbe coordonate constituite din curbe autoparalele. Astfel, presupunînd că curbele $y = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ și $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$ sînt curbe autoparalele, avem

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{11}^3 = 0, \quad \Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0. \quad (9)$$

Pentru a rămîne în acest caz, cel puțin una din componentele $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^3$ este diferită de zero. Atunci, abstractie făcînd de o transformare de forma (7δ) putem presupune

$$\Gamma_{22}^1 \neq 0 \quad (9')$$

Deci, în afară de necunoscuta Γ_{22}^1 , sistemul (4) mai depinde de necunoscutele

$$\Gamma_{12}^1, \Gamma_{13}^1, \Gamma_{23}^1, \Gamma_{12}^2, \Gamma_{13}^2, \Gamma_{23}^2, \Gamma_{12}^3, \Gamma_{22}^3, \Gamma_{13}^3, \Gamma_{23}^3. \quad (9'')$$

În condițiile (9), (9'), dacă toate componentele (9'') sînt nule, sistemul (4) devine

$$\Gamma_{212}^1 = -\frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x} = 0, \quad \Gamma_{223}^1 = \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial z} = 0$$

Deci, sistemul (4) admite soluție polinomială numai dacă

$$\Gamma_{22}^1 = a(y) \text{ cu } a(y) - \text{polinom în } y$$

Obținem astfel spațiul A_3 avînd conexiunea

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = a(y), & \Gamma_{ia}^1 = 0 \quad (\alpha \neq 2; i = 1, 2, 3) \\ \Gamma_{ij}^2 = 0, & \Gamma_{ij}^3 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

În acest caz, sistemul (3) admite soluția generală

$$V = \alpha_0[x + P(y)] + \beta_0 y + \gamma_0 z + \delta_0$$

dacă notăm $a(y) = -P''(y)$. Rezultă că transformarea asociată conexiunii (10) poate fi dată sub forma

$$u = x + P(y), \quad x = y, \quad w = z \quad (a = -P''). \quad (10')$$

și este o transformare Jonquière, adică o transformare cremoniană întreagă.

În condițiile (9), (9'), dacă numai una din componentele (9'') este diferită de zero, sistemul (4) admite soluții polinomiale în cazurile :

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &\neq 0, & \Gamma_{12}^1 &\neq 0; \\ \Gamma_{22}^1 &\neq 0, & \Gamma_{23}^1 &\neq 0; \\ \Gamma_{22}^1 &\neq 0, & \Gamma_{12}^3 &\neq 0; \\ \Gamma_{22}^1 &\neq 0, & \Gamma_{22}^3 &\neq 0.\end{aligned}$$

În primul caz, spațiul are conexiunea (simetrică) polinomială :

$$\Gamma_{22}^1 = (b' - 2b^2)x + a(y), \quad \Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{22}^2 = b(y) \quad (11)$$

celelalte componente ale conexiunii fiind nule ($a(y)$ și $b(y)$ — polinoame în y , accentul indică derivata în raport cu y).

Din (3) rezultă că transformarea asociată acestei conexiuni poate fi dată sub forma

$$z = xe^{-\int b dy} - \int \left[e^{\int b dy} \int a e^{-2\int b dy} dy \right] dy, \quad v = \int e^{\int b dy} dy, \quad w = z \quad (11')$$

care nu este o transformare cremoniană.

Această conexiune, pentru un spațiu A_2 , corespunde cazului evidențiat de prof. G. Vranceanu [2], prin care se arăta că reciproca nu este adevărată.

În al doilea caz, componentele nenule ale conexiunii spațiului A_3 sînt

$$\Gamma_{22}^1 = b'z + a(y), \quad \Gamma_{23}^1 = b(y) \quad (12)$$

unde $a(y)$ și $b(y)$ sînt polinoame de y . Din (3), dacă notăm $a = -P''$, $b = -Q'$, obținem că transformarea asociată acestei conexiuni este de forma

$$u = x + Q(y)z + P(y), \quad v = y, \quad w = z, \quad (12')$$

care este o transformare cremoniană întreagă.

În al treilea caz, spațiul A_3 are conexiunea :

$$\Gamma_{22}^1 = a(y), \quad \Gamma_{12}^3 = 1 \quad (13)$$

celelalte componente ale conexiunii fiind nule; $a(y)$ este un polinom în y . Notînd $a = -P''$, din (3) obținem că transformarea asociată este

$$u = x + P(y), \quad v = y, \quad w = z - xy - yP + 2 \int P dy, \quad (13')$$

care este o transformare cremoniană întreagă.

În ultimul caz, conexiunea spațiului A_3 are componentele nenule de forma

$$\Gamma_{22}^1 = a(y), \quad \Gamma_{22}^3 = b(y) \quad (14)$$

cu $a(y)$ și $b(y)$ polinoame în y . Notînd $a = -P'$, $b = -S'$, din (3) găsim că transformarea asociată spațiului este

$$u = x + P(y), \quad v = y, \quad w = z + S(y), \quad (14')$$

fiind o transformare cremoniană întreagă.

Procedînd astfel, obținem rezultatul:

Spațiile A_3 raportate la un sistem de axe de coordonate astfel încît două din ele sînt curbe autoparalele, au conexiunea de forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= (f' - 2f^2 - fg - bc)x + (-b' + 2fb + 2bg)z + a(y), \\ \Gamma_{12}^1 &= f(y), \quad \Gamma_{23}^1 = b(y), \\ \Gamma_{22}^2 &= -(f + g), \\ \Gamma_{12}^3 &= c(y), \quad \Gamma_{32}^3 = g(y), \\ \Gamma_{22}^3 &= (c' - 2cf - 2cg)x + (g' - 2g^2 - gf - bc)z + d(y), \end{aligned} \quad (15)$$

celelalte componente ale conexiunii fiind nule, unde $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$, $d(y)$, $f(y)$ și $g(y)$ sînt polinoame.

Un astfel de spațiu corespunde unei transformări cremoniene întregi, dacă

$$\begin{aligned} a &= -P'' - QRP'' + QS'', \quad b = -Q' + Q^2R, \\ c &= -R', \quad d = RP'' - S'', \quad f = -g = QR' \end{aligned} \quad (16)$$

sau

$$\begin{aligned} a &= S'' - QP'' + QS'', \quad b = Q', \quad c = -Q', \\ d &= QP'' - P'' - QS'', \quad f = -g = Q' \end{aligned} \quad (17)$$

cînd transformarea asociată este de forma

$$\begin{aligned} u &= x + Q(y)z + P(y) \\ v &= y \\ w &= R(y)x + (1 + QR)z + S(y) \end{aligned} \quad (16')$$

resp.

$$\begin{aligned} u &= Q(y)x + (Q + 1)z + P(y) \\ v &= y \\ w &= (Q - 1)x + Qz + S(y). \end{aligned} \quad (17')$$

Transformările (16') și (17') sînt transformări cvasiliniare, introduse de prof. G. Vrănceanu [2].

Observăm că, în afară de cazul (11), există și alte tipuri de spații local euclidiene A_3 cu conexiune polinomială și cu conexiune contractată nulă care să nu corespundă unei transformări cremoniene întregi.

Astfel, pentru $f = g = 0$, conexiunea (15) ia forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -bcx - b'z + a(y), \\ \Gamma_{23}^1 &= b(y), \quad \Gamma_{12}^3 = c(y), \\ \Gamma_{22}^3 &= c'x - bcz + d(y), \end{aligned} \quad (18)$$

celelalte componente ale conexiunii fiind nule. În acest caz, integrala generală a sistemului (3) este de forma

$$V = A(y)x + B(y) + C(y)z \quad (18')$$

cu A , B , C soluții ale sistemului de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} A' + cC &= 0 \\ C' + bA &= 0 \\ B'' + aA + dC &= 0 \end{aligned} \quad (18'')$$

Presupunem că nici una din componentele Γ_{23}^1 , Γ_{12}^3 nu este nulă. În caz contrar, de exemplu dacă $\Gamma_{12}^3 = c = 0$, spațiul A_3 are conexiunea

$$\Gamma_{22}^1 = -b'z + a(y), \quad \Gamma_{23}^1 = b(y), \quad \Gamma_{22}^3 = d(y) \quad (19)$$

și corespunde transformării cremoniene întregi

$$\begin{aligned} z &= x + Q(y)z + P(y) \\ v &= y \\ e &= z + S(y) \end{aligned} \quad (19')$$

unde $a = -P'' + QS''$, $b = -Q'$, $d = -S''$.

Vom considera cazurile particulare: $c = +1$, $b = \pm 1$. Atunci sistemul (18'') devine

$$A' + C = 0, \quad A'' \mp A = 0, \quad B'' + aA + dC = 0.$$

În primul caz ($c = b = 1$), obținem conexiunea

$$\Gamma_{22}^1 = -x + a(y), \quad \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{12}^3 = 1, \quad \Gamma_{22}^3 = -z + d(y), \quad (20)$$

transformarea asociată fiind

$$\begin{aligned} u &= xe^y - \iint (a - f)e^y dy dy - ze^y \\ v &= y \\ w &= xe^{-y} - \iint (a + d)e^{-y} dy dy + ze^{-y}. \end{aligned} \quad (20')$$

În celălalt caz ($c = -b = 1$), avem conexiunea

$$\Gamma_{22}^1 = x + a(y), \quad -\Gamma_{23}^1 = \Gamma_{12}^3 = 1, \quad \Gamma_{22}^3 = z + d(y), \quad (21)$$

transformarea asociată fiind

$$\begin{aligned} u &= x \sin y - \iint (a \sin y - d \cos y) dy dy - z \cos y \\ v &= y \\ w &= x \cos y - \iint (a \cos y + d \sin y) dy dy + z \cos y \end{aligned} \quad (21')$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] G. Vrănceanu, Les transformations crémoniennes entières et les espaces à connexion affine, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 243, nr. 25, 1956, pag. 1997—1999.
- [2] G. Vrănceanu, Sur les espaces à connexion affine localement euclidiens et les transformations crémoniennes entières, Rev. de math. pures et appl., Acad. RPR, t. II, 1957, p. 111—125.
- [3] G. Vrănceanu, Leçons de géométrie différentielle, vol. II, Ed. Acad. RPR, Buc. 1957.
- [4] Ion. D. Teodorescu și Ion Rusu, Asupra spațiilor bidimensionale cu conexiune afină local euclidiană și transformările cremoniene întregi, Anal. Univ. Buc., seria ști. naturii, Mat. fiz., nr. 29, 1961, p. 199—208.
- Ion D. Teodorescu, Transformările cremoniene întregi și spațiile cu conexiune afină polinomială, local euclidiene, Com. Acad. RPR, t. XIII, nr. 11, 1963, p. 939—946.
- [5] P. Mocanu, Asupra clasificării spațiilor A_3 cu conexiune constantă local euclidiene, Com. Acad. RPR, t. I, nr. 3, 1951, p. 239—243.

СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ АФФИННЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ И ЦЕЛЫЕ КРЕМОНОВЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть $A_3(x, y, z)$ — пространство с полиномиальной аффинной связью Γ_{ja}^i локально эвклидово и с нулевой плотной связью Γ_{ik}^i .

Доказываются:

1. Имеются пространства A_3 отнесенные к автопараллельным координатным осям.

Связность такого пространства может быть приведена к виду (8) и присоединенное преобразование (8') целая кремонова.

2. Если пространство A отнесенное к системе координатных осей, из которых по меньшей мере две являются автопараллельными, только пространства (15) где $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$, $d(y)$, $f(y)$ и $g(y)$ являются полиномами y , являются с полиномиальной аффинной связью.

Такое пространство соответствует целому кремоновому преобразованию, если (16) или (17) когда присоединенное преобразование имеет форму (16') или (17').

CORRESPONDANCES ENTRE ESPACES AFFINES À CONNEXION POLYNOMIALE ET LES TRANSFORMATIONS CRÉMONIENNES ENTIÈRES

RÉSUMÉ

Soit $A_3(x, y, z)$ un espace à connexion affine Γ_{jk}^i polynomiale, localement euclidien et à connexion contractée $\Gamma_k = \Gamma_{ik}^i$ nulle.

On démontre :

1. Il y a des espaces A_3 rapportés aux axes de coordonnées autoparallèles.

La connexion d'un tel espace peut être réduite à la forme (8), la transformation associée (8') étant crémonienne entière.

2. Les espaces A_3 rapportés à un système d'axes dont deux d'elles sont courbes autoparallèles, ont la connexion de la forme (15), où $a(y)$, $b(y)$, $c(y)$, $d(y)$, $f(y)$ et $g(y)$ sont de polynômes.

Un tel espace correspond à une transformation crémonienne entière si nous avons (16) ou (17), quand la transformation associée est de la forme (16'), resp. (17').

ASUPRA COHOMOLOGIEI SPAȚIILOR CU CURBURĂ CONSTANTĂ

T. HANGAN

Teoria derivărilor algebrei formelor diferențiale scalare pe o varietate diferențiabilă, elaborată de A. Frölicher și A. Nijenhuis a fost aplicată în topologia algebrică de K. Kodaira, D. Spencer (1) și P. Libermann (2) la construirea unor rezoluții pentru fasciculele de germeni de transformări infinitezimale, care conservă anumite structuri pe o varietate diferențiabilă sau analitică.

Pentru calculul grupurilor de coomologie ale spațiilor cu curbură constantă cu coeficienți în fascicolul de germeni de câmpuri de vectori Killing, E. Calabi a construit în (3) o rezoluție a acestui fascicol, folosind anumite câmpuri de tensori. Vom arăta, că rezoluția lui E. Calabi se poate exprima cu ajutorul derivărilor algebrei formelor tensoriale pe varietate în așa fel încît fasciculele rezoluției să fie fascicule de germeni de derivări, iar omomorfismele rezoluției să reprezinte comutări cu derivări legate de proprietățile geometrice ale spațiului cu curbură constantă.

1. Fie V o varietate diferențiabilă n -dimensională, V_x spațiul vectorilor tangenți la V în punctul $x \in V$, V_x^* dualul acestuia. O formă tensorială a spațiului V_x este un element al produsului tensorial $T_x \otimes A_{x,r}$ unde T_x este algebra tensorială a spațiului V_x iar $A_x = \bigotimes_{r=0}^n A_{x,r}$ este algebra exterioară a spațiului vectorial V_x ; altfel spus, un tensor ale cărui componente sînt forme diferențiale.

Spațiul $\mathfrak{T}_x = T_x \otimes A_x$ posedă o structură de algebră graduată $\mathfrak{T}_x = \bigoplus_{r=0}^n \mathfrak{T}_{x,r}$ unde $\mathfrak{T}_{x,r} = T_x \otimes A_{x,r}$, înmulțirea, notată cu semnul produsului exterior $\wedge$ ca și în algebra A_x fiind dată de formula

$$(t \otimes a) \wedge (t' \otimes a') = (t \otimes t') \otimes (a \wedge a'), \quad t \otimes a, \quad t' \otimes a' \in \mathfrak{T}_x$$

Dacă $\tau \in \mathfrak{T}_{x,p}$ și $\tau' \in \mathfrak{T}_{x,q}$ atunci $\tau' \wedge \tau = (-1)^{pq} \tau \wedge \tau'$.

Reuniunea $\mathfrak{T} = \bigcup_{x \in V} \mathfrak{T}_x$ are o structură de spațiu fibrat diferențiabil cu fibra o algebră și cu baza varietatea V ; $\mathfrak{T}$ este suma directă a componentelor sale omogene $\mathfrak{T}_r = \bigcup_{x \in V} \mathfrak{T}_{x,r}, r=0,1,\dots,n$

Vom numi *formă diferențială tensorială pe V* o secțiune diferențiabilă a acestui spațiu. Formele diferențiale tensoriale formează o algebră dacă convenim să numim produs a două astfel de forme, forma a cărei valoare într-un punct x din V este produsul exterior în $\mathcal{F}_x$ al valorilor în x ale formelor date. Și în această algebră produsul îl vom nota tot cu semnul $\wedge$.

2. O formă tensorială, pe care o vom utiliza în mod frecvent în cele ce urmează, este forma pe care o notăm dx și o definim după cum urmează.

Dacă ξ este un q -vector contravariant, prin valoarea formei $t \otimes a \in \mathcal{F}_{x,q}$ pe q -vectorul ξ vom înțelege tensorul $a(\xi) \cdot t \in T_x$, $a(\xi)$ fiind valoarea formei scalare a pe q -vectorul ξ .

Prin liniaritate se definește valoarea $\tau(\xi)$ a unei forme tensoriale τ pe q -vectorul ξ .

O formă tensorială este determinată de valorile sale pe elementele algebrei exterioare a spațiului V_x , ΛV_x . În particular, o formă vectorială contravariantă de grad 1 se identifică cu un endomorfism al spațiului V_x . Vom nota cu dx forma tensorială din $V_x \otimes A_{x,1}$ care se identifică cu endomorfismul identic al spațiului V_x , adică

$$dx(u) = u, \quad u \in V.$$

Dacă $(x^1, \dots, x^n)$ formează un sistem de coordonate locale în V atunci diferențialele $dx^1, \dots, dx^n$ formează o bază a spațiului V_x^* față de care un tensor τ din $V_r \otimes A_{x,1}$ se exprimă prin componente τ_j^i ; iar valoarea $\tau(u)$, $u \in V_x$ este vectorul de componente $\tau_j^i u^j$, u^j fiind componentele lui u . Forma vectorială dx are drept componente, simbolii lui Kronecker δ_j^i . Ca vector cu componente forme diferențiale forma dx este definită de componentele dx^i .

3. O metrică riemanniană pe V se definește printr-o formă tensorială g dublu covariantă de grad zero simetrică și pozitiv definită. Forma g definește o aplicație liniară a formelor vectoriale contravariante de grad q în mulțimea formelor vectoriale covariante de același grad; ea corespunde identificării ce se face între vectorii contravarianți și covarianți în spațiul lui Riemann. Dacă u^i sînt componentele unei forme vectoriale contravariante și g_{ij} componentele locale ale tensorului g atunci $u_i = g_{ir} u^r$ sînt componentele unei forme vectoriale covariante pe care o vom nota cu $g(u)$.

4. Vom considera acum derivările algebrei $\mathcal{F}$. O derivare de grad γ în algebra $\mathcal{F}$ este o aplicație $\Gamma: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ care satisface următoarele condiții:

a) este liniară

b) este omogenă de grad γ , adică $\Gamma(\mathcal{F}_r) \subset \mathcal{F}_{r+\gamma}$

c) dacă τ este un element omogen din $\mathcal{F}$ de grad r , adică $\tau \in \mathcal{F}_r$,

atunci:

$$\Gamma(\tau \wedge \tau') = \Gamma(\tau) \wedge \tau' + (-1)^{\gamma r} \tau \wedge \Gamma(\tau')$$

d) comută cu contracția tensorială.

Ținînd cont că orice formă tensorială de tipul $t \otimes a$ se exprimă ca produs $(t \otimes 1) \wedge (1 \otimes a)$ unde cu 1 am notat unitățile algebrei formelor

scalare și algebrei tensorilor pe varietatea V , condiția c) ne spune că Γ este determinată de modul în care operează asupra formelor scalare și asupra câmpurilor de vectori; în plus, ultima condiție ne spune că modul în care Γ acționează asupra câmpurilor covariante rezultă din cel de acționare asupra câmpurilor contravariante.

Vom spune că o derivare Γ este de „tip τ ” dacă ea acționează trivial asupra formelor scalare; ea definește o formă tensorială o dată contravariantă și o dată covariantă și invers, orice formă tensorială de acest tip definește o derivare de tip τ .

Dacă se alege un sistem de coordonate locale $x^1, \dots, x^n$ căruia îi corespunde în fiecare spațiu V_x baza $dx^1, \dots, dx^n$ și baza duală în V_x , $e_1, \dots, e_n$, o derivare Γ este definită de formele diferențiale locale

$$\Gamma(x^i) = h^i, \quad \Gamma(dx^i) = \xi^i, \quad \Gamma_j^i = (\Gamma(e_j))^i$$

de grade $\gamma, \gamma + 1$ și γ respectiv.

Definind comutatorul a două derivări Γ, Γ' de grade γ, γ' prin formula

$$[\Gamma\Gamma'] = \Gamma \circ \Gamma' - (-1)^{\gamma\gamma'} \Gamma' \circ \Gamma$$

se demonstrează că mulțimea derivărilor Γ se poate organiza ca o algebră Lie graduată, căci

$$[\Gamma'\Gamma] = (-1)^{\gamma\gamma'+1} [\Gamma\Gamma']$$

și

$$(-1)^{\gamma\gamma''} [\Gamma[\Gamma'\Gamma'']] + (-1)^{\gamma'\gamma} [\Gamma'[\Gamma''\Gamma]] + (-1)^{\gamma''\gamma'} [\Gamma''[\Gamma\Gamma']] = 0$$

Fiind date două derivări Γ, Γ' în coordonate locale prin formele h^i, ξ^i, Γ_j^i ; și $h'^i, \xi'^i, \Gamma_j'^i$ comutatorul lor se calculează cu formulele (/5/, p. 217)

$$\begin{aligned} [\Gamma\Gamma'](x^i) &= h^r \wedge \partial_r h'^i - (-1)^{\gamma\gamma'} h'^r \wedge \partial_r h^i + \xi \bar{\wedge} h'^i - (-1)^{\gamma\gamma'} \xi' \bar{\wedge} h^i \\ [\Gamma\Gamma'](dx^i) &= h^r \wedge \partial_r \xi'^i - (-1)^{\gamma\gamma'} h'^r \wedge \partial_r \xi^i + \xi \bar{\wedge} \xi'^i - (-1)^{\gamma\gamma'} \xi' \bar{\wedge} \xi^i \\ [\Gamma\Gamma']_j^i &= h^r \wedge \partial_r \Gamma_j'^i + \xi \bar{\wedge} \Gamma_j'^i - (-1)^{\gamma\gamma'} (h'^r \wedge \partial_r \Gamma_j^i + \xi' \bar{\wedge} \Gamma_j^i) + \\ &\quad + \Gamma_r^i \wedge \Gamma_j'^r - (-1)^{\gamma\gamma'} \Gamma_r'^i \wedge \Gamma_j^r. \end{aligned}$$

unde am notat după A. Frölicher și A. Nijenhuis cu semnul $\bar{\wedge}$ produsul interior dintre o formă vectorială locală ξ și o formă scalară locală ω , dat de formula

$$\xi \bar{\wedge} \omega = \frac{1}{(\gamma'-1)!} \omega_{rj_1 \dots j_{\gamma'-1}} \xi^r \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{\gamma'-1}}$$

dacă

$$\omega = \frac{1}{\gamma'!} \omega_{j_1 \dots j_{\gamma'}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{\gamma'}}$$

și cu ∂_r operatorul de derivare parțială a coeficienților unei forme locale în raport cu variabila x^r .

Prin analogie cu o noțiune folosită de E. Calabi în (3) vom spune că o derivare Γ este *primitivă* dacă

$$\Gamma(dx) = 0.$$

Dacă o derivare Γ este de tip τ și anume produsul $u \wedge v$ al unei forme vectoriale contravariante u cu o formă vectorială covariantă v având în coordonate locale componentele $u^i \wedge v_j$, atunci comutatorul ei cu o derivare Γ de grad γ este dat de formula

$$[\Gamma, u \wedge v]_j^i = \Gamma(u)^i \wedge v_j + (-1)^{\gamma \cdot \text{grad} u} u^i \wedge \Gamma(v)_j$$

5. Unui câmp de vectori contravarianți v pe varietatea V i se asociază o derivare Γ_v de grad zero, derivata Lie în direcția câmpului v , [5], p. 219.

Pe formele scalare Γ_v este caracterizată deci de ecuațiile

$$\Gamma_v(x^i) = v^i, \quad \Gamma_v(dx^i) = dv^i$$

și cum pentru un câmp de vectori u pe V , $\Gamma_v(u) = [vu]$ rezultă

$$(\Gamma_v)_j^i = (\Gamma_v(e_j))^i = \frac{\partial \delta_j^i}{\partial x^r} v^r - \delta_j^r \frac{\partial v^i}{\partial x^r} = - \frac{\partial v^i}{\partial x^j}$$

Γ_v este o derivare primitivă, adică $\Gamma_v(dx) = 0$. Într-adevăr,

$$(\Gamma_v(dx))^i = \Gamma_v(dx^i) + \Gamma_{vj}^i \wedge dx^j = dv^i - \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j = 0.$$

Dacă v este o transformare infinitezimală care conservă metrica definită de tensorul dublu contravariant g , componentele v^i ale câmpului v trebuie să satisfacă ecuațiile lui Killing

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r} v^r + g_{rj} \frac{\partial v^r}{\partial x^i} + g_{ir} \frac{\partial v^r}{\partial x^j} = 0.$$

La aceleași ecuații se ajunge punind condiția ca derivările Γ_v și $dx \wedge g(dx)$ să comute, adică

$$[\Gamma_v, dx \wedge g(dx)] = 0.$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} [\Gamma_v, dx \wedge g(dx)]_j^i &= \Gamma_v(dx)^i \wedge g(dx)_j + dx^i \wedge (\Gamma_v(g(dx)))_j \\ &= dx^i \wedge \left(\Gamma_v(g_{jr} dx^r) + \frac{\partial v^s}{\partial x^j} g_{sr} dx^r \right) \\ &= dx^i \wedge \left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^s} v^s + g_{js} \frac{\partial v^s}{\partial x^r} + \frac{\partial v^s}{\partial x^j} g_{sr} \right) dx^r \end{aligned}$$

Această formă nu poate fi nulă decât dacă ecuațiile lui Killing sînt satisfăcute, deoarece o formă tensorială mixtă $dx^i \wedge a_{jr} dx^r$ este nulă dacă și

numai dacă a_{jr} sînt toți nuli ($n \neq 1$). Într-adevăr componentele acestei forme sînt

$$\delta_s^i a_{jr} - \delta_r^i a_{js} = 0$$

și contractînd pentru $i = s$ rezultă $(n - 1) a_{jr} = 0$.

6. Un alt exemplu de derivare, de grad 1 însă, este diferențierea absolută asociată unei conexiuni liniare Γ . Se știe că într-un spațiu cu conexiune liniară A , diferențiala absolută Df a unei funcții f este diferențiala ordinară df , iar diferențiala absolută a unui cîmp de vectori v este o formă vectorială de grad 1 definită de formula

$$D(v)^i = dv^i + \Gamma_{jr}^i dx^r \cdot v^j = dv^i + \Gamma_j^i v^j, (\Gamma_j^i = \Gamma_{jr}^i dx^r)$$

unde Γ_{jr}^i sînt coeficienții de conexiune. Putem spune că o conexiune liniară se identifică cu o derivare de grad 1, care pe formele scalare coincide cu diferențiala exterioară d . Tensorul de curbura se identifică cu derivarea de grad 2, $[\Gamma\Gamma]$ care operează trivial asupra formelor scalare. Într-adevăr :

$$[\Gamma\Gamma]_j^i = 2(d(\Gamma_{jr}^i dx^r) + \Gamma_s^i \wedge \Gamma_j^s) = \left(\frac{\partial \Gamma_{jr}^i}{\partial x^s} - \frac{\partial \Gamma_{js}^i}{\partial x^r} + \Gamma_{us}^i \Gamma_{jr}^u - \Gamma_{ur}^i \Gamma_{js}^u \right) dx^s \wedge dx^r$$

Să scriem acum, cu ajutorul derivărilor, ecuațiile care definesc conexiunea lui Levi - Civita Γ într-un spațiu riemannian definit de tensorul fundamental g .

Se știe că Γ este definită de proprietățile : diferențiala absolută a tensorului metric fundamental g este nulă și tensorul de torsiune este nul. Aceste condiții se scriu :

$$\begin{aligned} a) [\Gamma g] &= 0 \\ b) \Gamma(dx) &= 0 \end{aligned}$$

În prima formulă g este interpretat ca o aplicație a cîmpurilor contravariante în mulțimea cîmpurilor covariante. A doua formulă ne spune că Γ este o derivare primitivă. Să verificăm afirmațiile făcute. Fiind dat un cîmp de vectori contravarianți $\Gamma(g(v))$ este forma vectorială covariantă cu componente

$$(\Gamma(g(v)))_i = \Gamma(g(v))_i - \Gamma_i^r (g(v))_r = d(g_{is} v^s) - \Gamma_i^r g_{rs} v^s$$

Pe de altă parte

$$(g\Gamma(v))_i = g_{ir} (dv^r + \Gamma_s^r v^s) = g_{ir} dv^r + g_{ir} \Gamma_s^r v^s$$

Scăzînd primii membri între ei apare $([\Gamma g](v))_i$ și deci

$$([\Gamma g](v))_i = (dg_{is} - \Gamma_i^r g_{rs} - \Gamma_s^r g_{ir}) v^s.$$

În membrul al doilea a apărut diferențiala absolută a tensorului metric fundamental în conexiunea Γ . În ce privește condiția $b)$

$$(\Gamma(dx))^i = \Gamma(dx^i) + \Gamma_j^i \wedge dx^j = ddx^i + \Gamma_{jr}^i dx^r \wedge dx^j = \frac{1}{2} (\Gamma_{jr}^i - \Gamma_{rj}^i) dx^r \wedge dx^j$$

și deci condiția $b)$ este echivalentă cu anularea tensorului de torsiune al conexiunii Γ .

7. Teorema lui Hermann Weyl care afirmă existența unei singure conexiuni liniare fără torsiune, care să păstreze lungimea vectorilor prin transport paralel într-un spațiu Riemann poate fi generalizată în teoria derivărilor. Să presupunem că g este tensorul metric fundamental într-un spațiu Riemann și Γ este o derivare de grad 1 definită deci de formele locale

$$\Gamma(dx^i) = h^i = h_r^i dx^r, \quad \Gamma(dx^i) = \xi^i, \quad (\Gamma(e_j))^i = \Gamma_{jk}^i dx^k.$$

Dacă aplicația g a câmpurilor contravariante în mulțimea câmpurilor covariante comută cu aplicația Γ , componentele tensorului și ale derivării satisfac ecuații care generalizează ecuațiile lui Ricci. Într-adevăr, pentru ca $[\Gamma g] = 0$ trebuie ca oricare ar fi câmpul de vectori u , de componente u^i

$$([\Gamma g](u))_i = 0$$

Dar

$$((\Gamma g)(u))_i = (\Gamma(g(u)))_i = \Gamma(g_{ir} u^r) - \Gamma_{ij}^r g_{ir} u^r$$

și

$$((g\Gamma)(u))_i = g_{ij} (\Gamma(u^j) + \Gamma_r^j u^r)$$

Deci

$$([\Gamma g](u))_i = (\Gamma(g_{ir}) - \Gamma_{ij}^r g_{ir} - g_{ij} \Gamma_r^j) u^r = 0$$

Coeficienții diferențialei dx^k în paranteză sînt deci nuli și rezultă ecuațiile

$$h_k^s \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} - \Gamma_{ik}^s g_{sr} - g_{is} \Gamma_{rk}^s = 0.$$

Dacă Γ este primitivă, adică $\Gamma(dx) = 0$ coeficienții Γ_{ik}^s sînt simetrici în indicii inferiori și devin simbolii lui Christoffel generalizați

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ir} \left(h_j^s \frac{\partial g_{rk}}{\partial x^s} + h_k^s \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^s} - h_r^s \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right).$$

Dacă derivarea Γ este de tip τ atunci ea este identic nulă, căci în acest caz h^i fiind forme nule $\Gamma_{jk}^i = 0$.

Deci dacă o derivare A de grad 1 și de tip τ satisface condițiile

$$A(dx) = 0, \quad [Ag] = 0$$

ea este identic nulă.

8. Fie V un spațiu riemannian cu curbura constantă K . Se știe că între tensorul de curbura R_{ijkl} și tensorul metric fundamental g_{ij} au loc relațiile

$$R_{ijkl} = K (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk})$$

sau ridicînd indicele i

$$R_{jkl}^i = K (\delta_k^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk}).$$

Contractînd cu $\frac{1}{2} dx^k \wedge dx^l$ în primul membru apar formele de curbura Ω_i^j care sînt componentele unei forme tensoriale mixte R de grad 2, o dată contravariante și o dată covariante. În membrul al doilea apare produsul exterior al forme vectoriale contravariante dx cu forma vectorială covariantă $g(dx)$. Deci

$$R = K dx \wedge g(dx)$$

este ecuația spațiilor cu curbura constantă K exprimată ca formă tensorială mixtă. Această formă o vom interpreta și ca derivare de grad 2 în algebra $\mathcal{F}$. Derivarea R este comutatorul $[\Gamma\Gamma]$ al derivării lui Levi-Civita Γ cu ea însăși, deci mai putem scrie

$$[\Gamma\Gamma] = K dx \wedge g(dx)$$

Simetria tensorului metric fundamental are drept consecință proprietatea de primitivitate a derivării $dx \wedge g(dx)$ căci

$$((dx \wedge g(dx))(dx))^i = (dx^i \wedge g_{js} dx^s) \wedge dx^j = dx^i \wedge g_{js} dx^s \wedge dx^j = 0$$

9. Fie V o varietate riemanniană cu curbura constantă K ; tensorul metric îl notăm g și conexiunea lui Levi Civita Γ .

Ne propunem să construim o rezoluție a fascicolului de germeni de câmpuri de vectori Killing, fascicol pe care-l vom nota Θ

$$0 \rightarrow \Theta \xrightarrow{i} \Phi_0 \xrightarrow{D^0} \Phi_1 \xrightarrow{D^1} \Phi_2 \xrightarrow{D^2} \dots$$

șirul scris fiind exact și fasciculele Φ_p fiind fine $/4/$.

Θ se identifică cu fascicolul germenilor de derivări de grad zero Γ_0 asociate germenilor de câmpuri de vectori Killing θ .

Φ_0 este fascicolul de germeni de derivări de grad zero Γ_v determinate de germeni de câmpuri de vectori contravarianți v .

Φ_1 este fascicolul de germeni de derivări primitive de tip τ de grad 2, de forma $dx \wedge a(dx)$ unde a este un tensor covariant simetric de grad 2.

$\Phi_2, \dots, \Phi_p, \dots$ sînt fasciculele de germeni de derivări primitive de grade $3, \dots, p+1, \dots$ de tip τ care comută cu aplicația g , adică din $T \in \Phi_p$ rezultă

$$[Tg] = 0, \quad T(dx) = 0.$$

Omomorfismele sînt :

- i incluziunea lui Θ în Φ_0
- D^0 comutarea cu derivarea $dx \wedge g(dx)$
- D^1 aplicația

$$dx \wedge a(dx) \xrightarrow{D^1} [\Gamma A] - \frac{1}{2} K dx \wedge a(dx)$$

unde derivarea A este definită de formulele

$$A(dx) = 0, [Ag] = [a\Gamma]$$

și în sfîrșit $D^2, D^3, \dots, D^p, \dots$ sînt comutări cu derivarea Γ .

10. Să arătăm că $D^0 i = 0, D^1 D^0 = 0, D^2 D^1 = 0$ și că în general $D^{p+1} D^p = 0$ pentru $p = 2, \dots$

Dacă $\theta \in \Theta$ atunci

$$D^0 i(\theta) = D^0(\Gamma_\theta) = [dx \wedge g(dx), \Gamma_\theta] = 0$$

după cum rezultă din considerațiile de la punctul 5.

Aici rezultă imediat chiar exactitatea șirului în Φ_0 căci și invers dacă $D^0(\Gamma_v) = 0$ atunci $v \in \Theta$.

Să arătăm acum că $D^1 D^0 = 0$. Fie $\Gamma_v \in \Phi_0$ atunci,

$$D^0(\Gamma_v) = [dx \wedge g(dx), \Gamma_v] = -dx \wedge \Gamma_v(g(dx))$$

Primitivitatea derivării $D^0(\Gamma_v)$ rezultă din cea a factorilor Γ_v și $dx \wedge g(dx)$.

Cîmpul de tensori dublu covarianți simetrici a căruia îi este asociată această derivare este $a = \Gamma_v g - g \Gamma_v$. Într-adevăr, $\Gamma_v g$ nu este un tensor, căci u fiind un cîmp vectorial contravariant

$$((\Gamma_v g)(u))_i = (\Gamma_v(g(u)))_i = \Gamma_v(g_{ir} u^r) - (\Gamma_v)_i^s g_{sr} u^r = \frac{\partial(g_{ir} u^r)}{\partial x^s} v^s + \frac{\partial v^s}{\partial x^i} g_{sr} u^r$$

și cîmpul $(\Gamma_v g)(u)$ depinde și de derivatele $\partial u^r / \partial x^s$ nu numai de valorile componentelor u . În schimb

$$\begin{aligned} ((\Gamma_v g - g \Gamma_v)(u))_i &= \frac{\partial(g_{ir} u^r)}{\partial x^s} v^s + \frac{\partial v^s}{\partial x^i} g_{sr} u^r - g_{is} \left[\frac{\partial u^s}{\partial x^r} v^r - \frac{\partial v^s}{\partial x^r} u^r \right] = \\ &= \left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^s} v^s + \frac{\partial v^s}{\partial x^i} g_{sr} + g_{is} \frac{\partial v^s}{\partial x^r} \right) u^r \end{aligned}$$

și deci $a = \Gamma_v g - g \Gamma_v$ este un tensor dublu covariant. Cum $\Gamma_v(dx) = 0$ rezultă că $a(dx) = \Gamma(g(dx))$.

Să înlocuim deci pe a de la 9. cu $[\Gamma_v g]$. Rezultă

$$[Ag] = [[\Gamma_v g]\Gamma]$$

și din cauză că $[\Gamma g] = 0$ conform condiției a) de la punctul 6, rezultă

$$[Ag] = -[[\Gamma \Gamma_v]g]$$

sau

$$[A + [\Gamma \Gamma_v], g] = 0$$

Teorema stabilită la punctul 7 ne spune deci că

$$A = [\Gamma_v \Gamma]$$

deoarece A și $[\Gamma \Gamma_v]$ sînt ambele de tip τ și primitive, deci și suma lor.

Să continuăm acum demonstrația formulei $D^1 D^0 = 0$. Compunerea $D^1 D^0$ este dată de formulele

$$\Gamma_v \xrightarrow{D^0} dx \wedge ([\Gamma_v g](dx)) \xrightarrow{D^1} [\Gamma [\Gamma_v \Gamma]] - \frac{1}{2} K dx \wedge ([\Gamma_v g](dx))$$

Însă, din identitatea lui Jacobi, rezultă

$$[\Gamma [\Gamma_v \Gamma]] - \frac{1}{2} [\Gamma_v [\Gamma \Gamma]] = 0$$

și ținînd cont de ecuația spațiului cu curbura constantă de la 8. rezultă $D^1 D^0 = 0$.

Pentru a demonstra că $D^2 D^1 = 0$ să considerăm o derivare $T = dx \wedge a(dx) \in \Phi_1$.

$$D^1(dx \wedge a(dx)) = [\Gamma A] - \frac{1}{2} K dx \wedge a(dx)$$

unde A a fost definit la 9 cu ajutorul tensorului a .

$$\begin{aligned} D^2 D^1(dx \wedge a(dx)) &= [\Gamma, [\Gamma A]] - \frac{1}{2} K dx \wedge a(dx) = \\ &= \frac{1}{2} [[\Gamma \Gamma] A] - \frac{1}{2} K dx \wedge \Gamma(a(dx)) = \\ &= \frac{1}{2} K ([dx \wedge g(dx), A] - dx \wedge ([\Gamma a](dx))) = \\ &= -\frac{1}{2} K dx \wedge (([Ag] + [\Gamma a])(dx)) = 0 \end{aligned}$$

Să demonstrăm în afîrșit că $D^{p+1} D^p = 0$ pentru $p \geq 2$. Fie $T \in \Phi_p$

$$D^{p+1} D^p(T) = D^{p+1}([\Gamma T]) = [\Gamma [\Gamma T]] = \frac{1}{2} [[\Gamma \Gamma] T] = \frac{1}{2} K [dx \wedge g(dx), T]$$

Însă

$$[T, dx \wedge g(dx)] = T(dx) \wedge g(dx) + (-1)^{p+1} dx \wedge ([Tg](dx)) = 0$$

dacă ținem cont de definiția fasciculelor Φ_p , $p \geq 2$.

Demonstrația incluziunii $\text{Ker } D^p \subset \text{Im } D^{p-1}$, $p \geq 1$ nu o vom face; componentele derivărilor fasciculelor Φ_p coincid cu componentele tensorilor care apar în rezoluția lui E. Calabi și omomorfismele D^p de asemenea.

BIBLIOGRAPHIE

1. K. Kodaira & D. Spencer: Multifoliated structures, *Annals of Math*, 1961.
2. P. Libermann: Sur certaines résolutions de faisceaux, *C. R. sc. Sc. Paris*—T. 254 p. 1735. 1962.
3. E. Calabi: On compact, Riemannian manifolds with constant curvature, *Symposium in Pure and Applied Mathematics*, Arizona, 1960.
4. F. Hirzebruch: *Neue topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie*, Springer, 1956.
5. T. Hangan: Asupra diferențierilor formelor tensoriale, *Analele Universității București*, 1962.

О КОГОМОЛОГИИ ПРОСТРАНСТВ С ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНОЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе выражено решение зародышевого пучка бесконечно малых преобразований пространства с постоянной кривизной данной Е. Калаби в $/3/$ с помощью производных в алгебре тензорных форм пространства.

SUR LA COHOMOLOGIE DES ESPACES À COURBURE CONSTANTE

RÉSUMÉ

On exprime la résolution du faisceau de germes de transformations infinitésimales d'un espace à courbure constante donnée par E. Calabi dans $/3/$ à l'aide de dérivations dans l'algèbre des formes tensorielles de l'espace.

SOLUȚII CU RISC MINIM ÎN PROGRAMAREA LINIARĂ*)

B. BEREANU

Introducere

Utilizarea modelelor stocastice în planificarea economiei în socialism a fost fundamentată încă de către Karl Marx, care în „Critica programului de la Gotha” a subliniat necesitatea utilizării calculului probabilităților pentru determinarea nivelului rezervelor. Această necesitate se impune ori de câte ori elementele planului conțin componente aleatoare, deoarece deși în cadrul economiei socialiste efectul factorilor aleatori este considerabil mai redus decât în economia capitalistă, totuși el nu poate fi neglijat. De aceea programarea liniară stocastică poate avea o mare importanță practică în planificarea economică. Problema programării lineare stocastice poate fi pusă în diferite moduri. Alegerea unui mod sau altul de a pune problema, poate reflecta anumite considerente economice, filosofice, care nu sînt explicit exprimate. De aceea este necesar să se analizeze critic modul în care problema programării stocastice a fost studiată în lucrările matematicienilor și economiștilor din țările capitaliste și să se determine corect modul în care trebuie pusă pentru a rezolva diferitele problemele de acest tip din economia socialistă.

În cele ce urmează ne vom ocupa de o problemă caracteristică economiei planificate, dar care desigur nu epuizează modelele matematice stocastice care își pot găsi aplicații în planificarea economiei socialiste. Alte moduri de abordarea a problemei programării liniare stocastice au fost studiate în [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9].

În planificarea curentă, diferenții indicatori ai activității economice a întreprinderilor sînt fixați prin planul de stat. Un asemenea indicator, de exemplu nivelul acumulărilor bănești totale poate fi considerat în anumite cazuri ca fiind maximul unei probleme de programare liniară. Dacă parametrii acestei probleme depind de una sau mai multe variabile aleatoare, pare destul de natural să se aleagă dintre planurile acceptabile acel plan pe sortimente căruia îi corespunde probabilitatea maximă ca

*) Soluțiile cu risc minim în programarea liniară au fost introduse în comunicarea „Asupra programării liniare stocastice” la colocviul asupra teoriei probabilităților, Brașov, 1962 unde au fost anunțate rezultatele cuprinse în acest articol.

indicatorul realizat să fie cel puțin egal cu cel planificat. Sîntem astfel conduși la un mod de abordare a programării stocastice, caracteristic economiei planificate, care constituie subiectul acestei lucrări.

Notății. Vectorii vor fi notați cu litere mici aldine ale alfabetului latin,

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, reprezintă vectorul cu componentele x_i sau punctul de coordonate x_i ($1 \leq i \leq n$) din spațiul afin asociat spațiului vectorial E^n . Vectorul cu toate componentele nule va fi notat $\mathbf{0}$.

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, înseamnă $x_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$). Vom scrie $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, dacă $x_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$).

Matricile vor fi notate cu litere mari de la începutul alfabetului latin. Vom mai scrie $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$, unde a_{ij} sînt componentele matricii $\mathbf{A}$. Dimensiunile unei matrici vor fi indicate prin $(m \times n)$ unde m este numărul liniilor, iar n , numărul coloanelor. $\mathbf{A}'$ este transpusa matricii $\mathbf{A}$ și deci $\mathbf{c}'$ este un vector — linie. $\mathbf{AB}$ va reprezenta produsul matricii $\mathbf{A}$ cu matricea $\mathbf{B}$, dacă produsul este posibil.

$\mathbf{O}$ mulțime va fi notată indicînd între paranteze toate elementele sale, sau proprietatea care definește mulțimea. Vom scrie de exemplu :

$$I = \{1, \dots, m\}, \quad X = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\};$$

$\min_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x})$, va însemna cea mai mică valoare a funcției $F(\mathbf{x})$ pe X .

La fel $\max_{\mathbf{x} \in X} F(\mathbf{x})$ va însemna cea mai mare valoare a funcției $F(\mathbf{x})$ pe X .

Vom nota de obicei un cîmp de probabilitate cu (Ω, K, P) , un eveniment elementar cu ω , iar variabilele aleatoare cu literele alfabetului grec, de exemplu $\gamma(\omega)$. Vectorii aleatori vor fi notați cu litere de același fel aldine. De exemplu

$\boldsymbol{\tau}(\omega) = (\tau_1(\omega), \dots, \tau_r(\omega))$ reprezintă vectorul aleator ale cărui componente sînt $\tau_j(\omega)$ ($1 \leq j \leq r$).

$P\{\cdot\}$ va însemna probabilitatea ca relația din paranteză să aibe loc

1. Soluții cu rise minim. Definiție

Fie dat sistemul de relații restrictive

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

și funcționala lineară

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{c}'\mathbf{x},$$

Vom presupune că :

$$\mathbf{c}(\omega) = \mathbf{c}^0 + \mathbf{c}^1 \tau_1(\omega) + \dots + \mathbf{c}^r \tau_r(\omega), \tag{1.2}$$

unde $\mathbf{c}^i$ ($0 \leq i \leq r$) sînt vectori n -dimensionali, iar $\boldsymbol{\tau}(\omega) = (\tau_1(\omega), \dots, \tau_r(\omega))$ este un vector aleator pe un spațiu cu probabilitate (Ω, K, P) , și $\varphi(t_1, \dots, t_r)$ este densitatea sa mixtă de probabilitate. Vom presupune

că X , mulțimea soluțiilor sistemului (1.1), este nevidă și mărginită. De asemenea $\tau(\omega)$ este mărginit :

$$\delta_j \leq \tau_j(\omega) \leq \delta'_j \quad (1 \leq j \leq r); \quad b \neq 0$$

Problema de planificare curentă menționată în introducere conduce la următoarea problemă matematică :

Să se determine vectorul n -dimensional x astfel ca sistemul (1.1) să fie satisfăcut iar

$$\psi(x, u) = P\{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\} \quad (1.3)$$

să ia valoarea maximă, u fiind un număr pozitiv dat *).

Vom numi o asemenea soluție a sistemului (1.1) *soluție cu risc minim*, corespunzătoare pragului u și o vom nota x_u .

În unele probleme practice prezintă interes să se maximizeze

$$\theta(x, u) = P\{\omega \mid c'(\omega)x \geq u\}. \quad (1.4)$$

Vom presupune în cele ce urmează că sîntem în primul caz și deci funcția de maximizat este (1.3).

Lema 1. *Avem inegalitățile următoare :*

$$P\{\omega \mid \max_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\} \leq \max_{x \in X} P\{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\} \leq P\{\omega \mid \min_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\}, \quad (1.5)$$

$$P\{\omega \mid \min_{x \in X} c'(\omega)x \geq u\} \leq \max_{x \in X} P\{\omega \mid c'(\omega)x \geq u\} \leq P\{\omega \mid \max_{x \in X} c'(\omega)x \geq u\}, \quad (1.6)$$

u fiind un număr real.

Demonstrație. S-a arătat în (7) că $P\{\omega \mid \max_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\}$ și $P\{\omega \mid \min_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\}$ există.

Dacă se notează cu $F_\gamma(u)$, $F_\lambda(u)$ funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare $\gamma(\omega) = \min_{x \in X} c'(\omega)x$ și $\lambda(\omega) = \max_{x \in X} c'(\omega)x$, avem :

$$P\{\omega \mid \max_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\} = F_\lambda(u) \text{ și } P\{\omega \mid \min_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\} = F_\gamma(u).$$

$$\text{Notăm } A_x(u) = P\{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\} \text{ și } B_x(u) = P\{\omega \mid c'(\omega)x \geq u\}.$$

Observăm că $A_x(u)$ și $B_x(u)$ sînt funcții continue de componentele lui x pe X . Într-adevăr avem de exemplu

$$A_x(u) = \int_W \dots \int \varphi(t_1, \dots, t_r) dt_1 \dots dt_r$$

unde $W = \{(t_1, \dots, t_r) \mid \delta_j \leq t_j \leq \delta'_j \quad (1 \leq j \leq r); c^0x + \sum_{j=1}^r (c^j x) t_j \leq u\}$.

Se verifică imediat următoarele implicații :

$$\begin{aligned} \omega \in \{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\} \quad (\omega \in \Omega, x \in X) &\Rightarrow \omega \in \{\omega \mid \min_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\}, \\ \omega \in \{\omega \mid \max_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\} \quad (\omega \in \Omega, x \in X) &\Rightarrow \omega \in \{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

*) Potrivit clasificării detaliate a diferitelor moduri posibile de abordare a programării liniare stocastice dată de A. Charnes și W. W. Cooper [Operations Res. 11 (1963), 18--39] problema (1.1), (1.3) este un model de tip P.

Din (1.7) și din continuitatea funcției $A_x(u)$ pe compactul X urmează (1.5).

La fel se stabilește (1.6).

Utilizînd noțiunea de regiune de decizie introdusă în (7), se obține :

Teorema 1. *Dacă problema de programare liniară*

$$\min_{x \in X} c'(\omega)x$$

are o singură regiune de decizie, avem :

$$\max_{x \in X} P\{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\} = P\{\omega \mid \min_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\} \quad (1.8)$$

u fiind un număr real oarecare.

Analog, dacă problema de programare liniară

$$\max_{x \in X} c'(\omega)x$$

are o singură regiune de decizie, are loc :

$$\max_{x \in X} P\{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\} = P\{\omega \mid \max_{x \in X} c'(\omega)x \geq u\} \quad (1.9)$$

Demonstrație. Să stabilim (1.8). Fie $\hat{x}$ o soluție optimă pentru orice $\omega \in \Omega$ a problemei de programare liniară $\min_{x \in X} c'(\omega)x$. Avem din (1.5) :

$$\max_{x \in X} P\{\omega \mid c'(\omega)x \leq u\} \leq P\{\omega \mid \min_{x \in X} c'(\omega)x \leq u\} \quad (\omega \in \Omega) \quad (1.10)$$

Dar $\hat{x} \in X$ și

$$\max_{x \in X} P\{\omega \mid c'(\omega)x \geq u\} \geq P\{\omega \mid c'(\omega)\hat{x} \leq u\} \quad (\omega \in \Omega) \quad (1.11)$$

Pentru a stabili (1.9) se procedează la fel.

2. Lema 1 ne arată că funcțiile de repartiție $F_\gamma(z)$ și $F_\lambda(z)$ introduse în (7) ne permit să determinăm margini pentru $\max_{x \in X} A_x(u)$ și $\max_{x \in X} B_x(u)$.

Avem potrivit acestei leme :

$$F_\lambda(u) \leq \max_{x \in X} A_x(u) \leq F_\gamma(u), \quad (2.1)$$

$$1 - F_\gamma(u) \leq \max_{x \in X} B_x(u) \leq 1 - F_\lambda(u). \quad (2.2)$$

Teorema 1 ne permite, în cazul existenței unei singure regiuni de decizie, de exemplu cazul micilor variații aleatoare, să determinăm $\max_{x \in X} A_x(u)$ și $\max_{x \in X} B_x(u)$.

Avem potrivit acestei leme :

$$\max_{x \in X} A_x(u) = F_\tau(u), \quad (2.3)$$

$$\max_{x \in X} B_x(u) = 1 - F_\lambda(u). \quad (2.4)$$

Relațiile (2.1—2.4) prezintă interes în practică deoarece permit alegerea indicatorului de plan u astfel încât, presupunând că se determină soluția cu risc minim corespunzător pragului, u , probabilitatea îndeplinirii sarcinilor de plan să fie suficient de mare.

3. Soluția cu risc minim introdusă în 1 permite să se dea o rezolvare problemei programării liniare incerte *) în cazul unei singure variabile aleatoare.

Într-adevăr avem :

Teorema 2.

Dacă $c(\omega) = c^0 + c^1 \tau(\omega)$, $c^1 > 0$, iar $F_\tau(z)$, funcția de repartiție a variabilei aleatoare mărginite $\tau(\omega)$ este continuă, soluția cu risc minim a problemei de programare liniară (1.1, 1.2) nu depinde de $F(z)$ și se obține rezolvînd o problemă de programare hiperbolică.

Demonstrație. Avem :

$$\omega \in \{\omega \mid (c^0 + c^1 \tau(\omega))x' \leq u\} \Rightarrow \omega \in \left\{ \omega \mid \tau(\omega) \leq \frac{u - c^0 x'}{c^1 x'} \right\} \quad (3.1)$$

și

$$\omega \in \left\{ \omega \mid \tau(\omega) \leq \frac{u - c^0 x'}{c^1 x'} \right\} \Rightarrow \omega \in \{\omega \mid (c^0 + c^1 \tau(\omega))x' \leq u\}. \quad (3.2)$$

Deci

$$P\{\omega \mid (c^0 + c^1 \tau(\omega))x' \leq u\} = P\left\{ \omega \mid \tau(\omega) \leq \frac{u - c^0 x'}{c^1 x'} \right\} = F_\tau\left(\frac{u - c^0 x'}{c^1 x'}\right).$$

Deoarece $F_\tau(z)$ este nedescrescătoare și continuă,

$$\max_{x \in X} P\{\omega \mid (c^0 + c^1 \tau(\omega))x' \leq u\} = F_\tau\left[\max_{x \in X} \left(\frac{u - c^0 x'}{c^1 x'}\right)\right] \quad (3.3.)$$

Deci soluția cu risc minim corespunzătoare pragului u , x_u se obține rezolvînd problema de programare hiperbolică

$$\max_{x \in X} \left[\frac{u - c^0 x'}{c^1 x'} \right].$$

*) Dacă într-o problemă de programare liniară nu se cunoaște [densitatea mixtă de probabilitate a variabililor aleatoare care intervin, avem după G. Tintner o problemă de programare incertă.

Această problemă poate fi rezolvată cu metodele propuse în [10, 11, 12].

Observații. 1. Dacă $\delta \leq \tau(\omega) \leq \delta'$, vom avea $P\{\omega | (c^0 + c^1 \tau(\omega))x'_u \leq u\} = 0$, dacă $\frac{u - c^0 x'_u}{c^1 x'_u} \leq \delta$ și $P\{\omega | (c^0 + c^1 \tau(\omega))x'_u \leq u\} = 1$, dacă $\frac{u - c^0 x'_u}{c^1 x'_u} \geq \delta'$.

Deci dacă sistemul $Ax = b$, $x \geq 0$ ($\delta' c^1 + c^0$) $x' \leq u$ este compatibil, o soluție a acestui sistem este soluție cu risc minim.

2. Se vede din (3.3) că soluția cu risc minim corespunzătoare pragului u nu depinde de funcția de repartiție F_τ însă probabilitatea corespunzătoare în (3.3) depinde de această funcție de repartiție.

Teorema 2 rămîne valabilă și în cazul cînd avem de determinat $x \in X$ care maximizează

$$P\{\omega | (c^0 + c^1 \tau(\omega))x' \geq u\}.$$

Într-adevăr

$$\begin{aligned} P\{\omega | (c^0 + c^1 \tau(\omega))x' \geq u\} &= P\left\{\omega | \tau(\omega) \geq \frac{u - c^0 x'}{c^1 x'}\right\} \\ &= 1 - F_\tau\left(\frac{u - c^0 x'}{c^1 x'}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Deci } \max_{x \in X} P\{\omega | (c^0 + c^1 \tau(\omega))x' \geq u\} = 1 - F_\tau\left(\min_{x \in X} \frac{u - c^0 x'}{c^1 x'}\right).$$

4. Vom studia soluția cu risc minim corespunzătoare problemei de programare stocastică introdusă în [1] care după cum rezultă și din lucrarea citată prezintă importanță în planificarea în agricultură.

Vom considera relațiile restrictive de forma :

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Vom presupune că mulțimea X a soluțiilor sistemului (4.1) este nevidă, mărginită, iar $0 \notin X$.

Vom lua funcția criteriu

$$z = \sum_{i=1}^n t_i x_i \quad (4.2)$$

unde t_i ($1 \leq i \leq n$) sînt variabile aleatoare normale, independente cu parametrul (m_i, σ_i). Presupunem că trebuie să avem :

$$z \leq u, \quad (4.3)$$

u fiind un număr pozitiv dat (în practică, un indicator de plan). De exemplu u poate reprezenta cheltuielile de producție ale unei GAS.

Teorema 3. *Soluția cu risc minim a problemei de programare stocastică (4.1, 4.2, 4.3) este dată de soluția următoarei probleme de programare neliniară :*

să se maximizeze

$$\frac{u - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \quad (4.4)$$

condițiile restrictive fiind (4.1).

Dacă $m_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) soluția cu risc minim nu depinde de u și se obține rezolvînd o problemă de programare pătratică.

Demonstrație. Se vede că

$$\{\omega \mid z(\omega) \leq u\} = \left\{ \omega \mid \frac{z(\omega) - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \leq \frac{u - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \right\}. \quad (4.5)$$

Deci

$$P\{\omega \mid z(\omega) \leq u\} = P\left\{ \omega \mid \frac{z(\omega) - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \leq \frac{u - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \right\}. \quad (4.6)$$

Dar $z(\omega)$, pentru un x dat, urmează, după cum se vede din (4.2), o lege normală cu media $\sum_{i=1}^n m_i x_i$ și dispersia $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2$.

Deci

$\frac{z(\omega) - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}}$ urmează o lege normală cu parametrii (0,1) și (4.6) se poate scrie :

$$P\{\omega \mid z(\omega) \leq u\} = \Phi \left(\frac{u - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \right), \quad (4.7)$$

unde $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{s^2}{2}} ds$.

Avem însă

$$\max_{x \in X} P\{\omega | z(\omega) \leq u\} = \Phi \left(\max_{x \in X} \frac{u - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \right), \text{ adică determinarea so-}$$

luției cu risc minim revine la rezolvarea problemei de programare neliniară (4.4, 4.1).

Dacă $m_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$),

$$P\{\omega | z(\omega) \leq u\} = \Phi \left(\frac{u}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}} \right). \quad (4.8)$$

Se vede din (4.8) că soluția cu risc minim se obține rezolvând următoarea problemă de programare pătratică :

să se determine vectorul x (x_i) care satisface (1.1) și minimizează :

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2. \quad (4.9)$$

Pentru rezolvarea acestei probleme se poate utiliza unul dintre algoritmele programării pătratice, de exemplu [13, 14].

Soluția cu risc minim nu depinde în acest caz de u și este, cum era și de așteptat, soluția care minimizează dispersia funcției criteriu.

5. Putem considera fără a micșora generalitatea, în locul problemei (4.1, 4.4) următoarea problemă de programare neliniară echivalentă : să se maximizeze :

$$\psi(y) = \frac{u - \sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \quad (5.1)$$

condițiile restrictive fiind

$$\begin{aligned} Ay &\leq b, \\ y &\leq 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

iar $p_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$) și $u > 0$ fiind numere reale date.

Notăm Y , mulțimea soluțiilor (5.2). Din ipotezele făcute asupra sistemului (4.1) rezultă că Y este mărginită și nevidă.

Avem :

Lema 2. *Maximele funcției $\psi(y)$ pe mulțimea (5.2) sînt situate pe frontiera acestei mulțimi.*

Demonstrație.

Fie y^* un punct de maxim al funcției $\psi(y)$ care ar aparține interiorului mulțimii definite de (5.2) și S o hipersferă conținută în această mulțime, cu centrul în y^* și cu raza convenabil aleasă pentru ca

$$\psi(y) \leq \varphi(y^*)(y \in S). \quad (5.3)$$

$$a) \quad u - \sum_{i=1}^n p_i y_i \geq 0. \quad (5.4)$$

Mulțimea

$$S \cap \{y \mid y < y^*\}$$

nu este vidă, deoarece conține de exemplu interiorul segmentului liniar conținut în S și situat pe dreapta care unește originea cu y^* . Fie

$$y^0 \in S \cap \{y \mid y < y^*\}. \quad (5.5)$$

Avem din (5.5):

$$u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^0 > u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^* \quad (5.6)$$

$$\frac{1}{|y^0|} > \frac{1}{|y^*|}$$

unde am notat $|z|$, lungimea vectorului z .

Din (5.4, 5.5, 5.6) urmează (înmulțind membru cu membru inegalitățile din (5.6):

$$\psi(y^0) > \psi(y^*) \quad (y^0 \in S),$$

ceea ce contrazice (5.3).

$$b) \quad u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^* < 0 \quad (5.7)$$

Fie semispațiul deschis H definit de

$$H = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^n p_i (y_i - y_i^*) < 0 \right\}, \quad (5.8)$$

al cărui hiperplan trece prin y^* și mulțimea R definită de

$$R = \{y \mid |y| > |y^*|\}. \quad (5.9)$$

Mulțimea

$U = S \cap H \cap R$ este o submulțime nevidă a mulțimii S deoarece $S \cap H$ nu poate fi o submulțime a hipersferei $\bar{R}$ definită de:

$$\bar{R} = \{y \mid |y| < |y^*|\}.$$

Într-adevăr pentru y^* și S dați, $S \cap H \cap \bar{R}$ are caracter maximal dacă H este un suport al mulțimii convexe $\bar{R}$, adică $\bar{R} \subset H$. Aceasta are

loc dacă hiperplanul generator al semispațiului H este hiperplan de sprijin în y^* al mulțimii $\bar{R}$. Dar chiar și în acest caz nu putem avea $S \cap H \cap \bar{R} = S \cap H$, deoarece am avea $S \cap H \cap \bar{R} = S \cap \bar{R}$, iar $S \cap \bar{R} \subset S \cap H$.

Mulțimea U nefiind vidă, fie $y^0 \in U$ și diferit de y^* . Avem din (5.8, 5.9)

$$u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^0 > u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^*, \quad (5.10)$$

$$\frac{1}{|y^0|} < \frac{1}{|y^*|}. \quad (5.11)$$

Rezultă :

$$\frac{u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^0}{|y^0|} > \frac{u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^*}{|y^0|}. \quad (5.12)$$

Ținând seama de (5.7), se obține din (5.11)

$$\frac{u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^*}{|y^0|} > \frac{u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^*}{|y^*|}. \quad (5.13)$$

Din (5.12) și (5.13) rezultă

$$\psi(y^0) > \psi(y^*),$$

ceea ce contrazice (5.3).

Corolar. Fie x, z aparținând frontierei mulțimii Y și $z = lx$, unde $l > 1$. Funcția $\psi(y)$ nu poate avea un maxim în z . Într-adevăr Y fiind o mulțime convexă, pentru orice $0 \leq \lambda \leq 1$, $y(\lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)z \in Y$. Introducând $z = lx$ în $y(\lambda)$ se obține :

$$y(\lambda) = (\lambda + l - \lambda l)x.$$

Avem $y(0) = z$ și pentru orice $0 < \lambda \leq 1$,

$$y(\lambda) < z,$$

$$|y(\lambda)| < |z|.$$

Din demonstrația lemei 2 rezultă

$$\psi(y(\lambda)) > \psi(z) \quad (0 < \lambda \leq 1);$$

deci $\psi(y)$ nu poate avea un maxim în $y = z$.

Lema 3. Dacă $\max_{y \in Y} (u - \sum_{i=1}^n p_i y_i) = 0$,

$$\max_{y \in Y} \left(\frac{u - \sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \right) = 0 \text{ și orice punct situat în hiperplanul } \sum_{i=1}^n p_i y_i = u$$

este un punct de maxim al funcției $\psi(y)$.

Demonstrație. Nu putem avea $\max_{y \in Y} \psi(y) < 0$, deoarece $\psi(y^0) = 0$, unde

y^0 este o soluție a problemei de programare liniară $\max_{y \in Y} \left(u - \sum_{i=1}^n p_i y_i \right) = 0$.

Dacă am avea $\max_{y \in Y} \psi(y) = \psi(y^*) = a > 0$, am avea și $u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^* = a \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^{*2}} > 0$,

ceea ce contrazice ipoteza $\max_{y \in Y} \left(u - \sum_{i=1}^n p_i y_i \right) = 0$.

Deci $\max_{y \in Y} \psi(y) = 0$, deoarece $\psi(y)$ își atinge marginea superioară pe Y .

6. Fie L un poliedru convex din E^n definit de :

$$L = \{x \mid a_i x \leq b_i, (1 \leq i \leq m)\}, \quad (6.1)$$

unde a_i este un vector linie, x este un vector coloană și b_i este un scalar. L este o mulțime mărginită (poliedru convex) și fie I o submulțime a mulțimii de indici $\{1, \dots, m\}$. Submulțimea F_I a mulțimii L definită de :

$$a_i x = b_i \quad (i \in I \subset \{1, \dots, m\}), \quad (6.2)$$

$$a_i x < b_i \quad (i \in \{1, \dots, m\} - I), \quad (6.3)$$

se zice față a poliedrului convex L asociată mulțimii de indici I . Rezultă că există cel mult 2^m asemenea fețe (numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $\{1, \dots, m\}$). Fața F_I este intersecția varietății liniare (6.2) cu mulțimea deschisă $\{x \mid a_i x < b_i\}$. Dacă această mulțime este vidă, nu există o față atașată mulțimii I . Se numește ordinul feței F_I numărul de dimensiuni al varietății liniare (6.2) (dimensiunea subspațiului paralel la această varietate). Dacă A_I este matricea coeficienților ecuațiilor (6.2) și r_I este rangul acestei matrici, ordinul feței F_I este $n - r_I$. Frontiera feței F_I este formată din fețele de ordin mai mic care se obțin dacă în unele dintre relațiile (6.3) semnul $<$ se înlocuiește cu $=$. Vom numi față închisă, închiderea mulțimii F_I , pe care o vom nota $\bar{F}_I$. Reuniunea tuturor fețelor poliedrului convex L constituie frontiera sa. Fețele de ordinul 0 și 1 se numesc respectiv vîrfurile și muchiile poliedrului convex L .

Lema 4. Fiind dată o față F_I a poliedrului convex definit de (5.2), funcția $\psi(y)$ are cel mult un maxim local nenul situat pe această față. Dacă un asemenea maxim local există, el este singurul din $\bar{F}_I$.

Demonstrație. Presupunem că $\psi(\mathbf{y})$ ar avea două maxime locale situate în $\mathbf{x}$ și $\mathbf{z}$ ($\mathbf{x} \neq \mathbf{z}$), $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in \overline{F}_1$ și cel puțin unul dintre aceste puncte ar aparține mulțimii F_1 . Presupunem de asemenea că $\psi(\mathbf{x}) \neq 0$. Dreapta

$$\mathbf{y}(\lambda) = (1 - \lambda)\mathbf{x} + \lambda\mathbf{z} \quad (6.4)$$

unde λ este un număr real oarecare este conținută în întregime în varietatea (6.2). Pe dreapta (6.4) ψ este o funcție de o singură variabilă λ . Fie această funcție $\psi^*(\lambda)$. Deoarece $\psi(\mathbf{y})$ are maxime locale în $\mathbf{x}$ și $\mathbf{z}$, $\psi^*(\lambda)$ are maxime locale în $\lambda = 0$ și $\lambda = 1$. (Într-adevăr o vecinătate a lui $\mathbf{x}$, respectiv $\mathbf{z}$ din varietatea (6.2) determină prin intermediul relației (6.4) o vecinătate a lui 0, respectiv 1 în mulțimea numerelor reale. Mulțimea valorilor λ pentru care $\mathbf{y}(\lambda) \in X$ este o mulțime convexă închisă de numere reale, deci un segment $[\lambda_1, \lambda_2]$. Prin ipoteză cel puțin unul dintre numerele 0, 1 aparține interiorului acestui segment. Avem din (5.1, 6.4) :

$$\psi^*(\lambda) = \frac{\alpha + \beta\lambda}{\sqrt{\gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon}} \quad (6.5)$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ nu depind de λ .

Deoarece $0 \in X$, $\gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon \neq 0$ pentru orice $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Avem însă din (6.5)

$$\frac{d\psi^*(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\lambda(\beta\delta - 2\alpha\gamma) + 2\beta\varepsilon - \alpha\delta}{2(\gamma\lambda^2 + \delta\lambda + \varepsilon)^{3/2}} \quad (6.6)$$

Rezultă că funcția $\psi^*(\lambda)$ este derivabilă în $[\lambda_1, \lambda_2]$, derivata sa este continuă și are cel mult un zero în acest interval. (Vom arăta că $\frac{d\psi^*(\lambda)}{d\lambda}$ nu poate fi identic nulă în acest interval.

Deci $\psi^*(\lambda)$ nu poate avea două maxime locale nenule decât dacă aceste maxime sînt situate la extremitățile segmentului $[\lambda_1, \lambda_2]$. Am ajuns deci la o contradicție deoarece am presupus că cel puțin una dintre valorile maximizante este situată în interiorul segmentului $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Să arătăm că $\frac{d\psi^*(\lambda)}{d\lambda}$ nu este identic nulă cînd $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Avem prin ipoteză că $\psi^*(\lambda)$ nu este identic nulă în acest interval. Deci dacă am avea

$$\frac{d\psi^*(\lambda)}{d\lambda} \equiv 0 \quad (\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]), \quad (6.7)$$

am avea și

$$\psi^*(\lambda) = k \quad (k \neq 0, \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]). \quad (6.8)$$

Să facem această ipoteză.

Pentru a simplifica calculele vom utiliza notația vectorială și pentru a evita vreo confuzie vom nota în cele ce urmează în acest paragraf $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ produsul scalar al vectorilor $\mathbf{x}, \mathbf{z}$.

Avem din (6.4. 6.8)

$$[u - (\mathbf{p}, \mathbf{x}) + (\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{z})]^2 = k^2 \lambda^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{z}, \mathbf{z}) - 2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + 2k^2 \lambda ((\mathbf{x}, \mathbf{z}) - (\mathbf{x}, \mathbf{x})) + k^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (6.9)$$

unde $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$.

Relația (6.9) trebuie să aibă loc pentru orice $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Identificând coeficienții puterilor variabilei λ în cei doi membrii ai relației (6.9) obținem următoarele condiții :

$$[u - (\mathbf{p}, \mathbf{x})]^2 = k^2 (\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (6.10)$$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{z})^2 = k^2 (\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} - \mathbf{z}), \quad (6.11)$$

$$[u - (\mathbf{p}, \mathbf{x})] [\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{z}] = k^2 (\mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x}). \quad (6.12)$$

Înmulțind egalitățile (6.10), (6.11) membru cu membru se obține :

$$[u - (\mathbf{p}, \mathbf{x})]^2 (\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{z})^2 = k^4 (\mathbf{x}, \mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} - \mathbf{z}). \quad (6.13)$$

Prin ridicarea la pătrat din (6.12) urmează :

$$[u - (\mathbf{p}, \mathbf{x})]^2 (\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{z})^2 = k^4 (\mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x})^2. \quad (6.14)$$

Deoarece $k \neq 0$ din (6.13, 6.14) obținem

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) (\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{x} - \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z} - \mathbf{x})^2. \quad (6.15)$$

Făcând calculele în (6.15) rezultă în definitiv

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z})^2 \quad (6.16)$$

Din inegalitatea lui Cauchy și (6.16) avem

$$\mathbf{x} = l \mathbf{z}, \quad (6.17)$$

l fiind un scalar. Din corolarul lemei 2 și (6.17) rezultă că se ajunge la o contradicție presupunând $\frac{d\psi^*(\lambda)}{d\lambda} \equiv 0$ când $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Dacă $l < 1$, intervertim rolul punctelor $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ și obținem $\mathbf{z} = l' \mathbf{x}$, cu $l' > 1$.

Observare. Funcția $\psi(\mathbf{y})$ nu poate avea un maxim local pe o față determinată de intersecția unei varietăți :

$$y_j = 0 \quad (j \in J \subset \{1, \dots, n\}),$$

$$y_j > 0 \quad (j \in \{1, \dots, n\} - J),$$

cu mulțimea deschisă

$$\mathbf{a}_i \mathbf{y} < \mathbf{b}_i \quad (i \in \{1, \dots, m\}),$$

deoarece în acest caz funcția care se obține din $\psi(\mathbf{y})$ făcând $y_j = 0, i \in J$ ar avea un maxim local în interiorul poliedrului convex definit de restricțiile care se obțin din (5.2) făcând aceeași înlocuire ; dar aceasta este imposibil conform lemei 2.

7. Dacă $\psi(\mathbf{y})$ ar avea un singur maxim local care ar fi și maximul global el ar putea fi determinat cu un procedeu de tipul metodei gradientului de exemplu metoda direcțiilor posibile a lui Zoutendijk [15]. În general însă $\psi(\mathbf{y})$ are mai multe maxime locale. De exemplu funcția

$$f(x, y) = \frac{2,5 - 2x - 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

are pe mulțimea (x, y) definită de

$$\begin{aligned} x + y &\leq 3, \\ -x - 2y &\leq -2, \\ x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \end{aligned}$$

maxime locale în punctele $(0,1)$, $(2,0)$.

Să presupunem că am găsit o soluție a sistemului (4.1).

Fie aceasta $\mathbf{y}^0$. Pentru a determina un maxim local vom utiliza metoda direcțiilor posibile utilizată de obicei pentru programarea convexă [15]. Vom arăta că această metodă împreună cu lemele precedente ne permite să identificăm toate maximele locale și să determinăm maximul absolut.

Vom expune pe scurt metoda direcțiilor posibile pe care o vom utiliza și care ne va furniza în cazul nostru, un maxim local.

Fie

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i \mathbf{y} &\leq b_i & (1 \leq i \leq m) \\ y_j &\leq 0 & (1 \leq j \leq n), \end{aligned} \quad (7.1)$$

relațiile restrictive (4.1), unde am notat $\mathbf{a}_i$ vectorul linie format din elementele liniei i ale matricei $\mathbf{A}$ și cu b_i, y_j componentele vectorilor $\mathbf{b}$ și $\mathbf{y}$,

Fie Y mulțimea soluțiilor sistemului (7.1) și $\mathbf{y}^0 \in Y$. Notăm I mulțimea indicilor $(1 \leq i \leq m)$, J , mulțimea indicilor $(1 \leq j \leq n)$, $I(\mathbf{y}^0)$ submulțimea lui I definită de $\mathbf{a}_i \mathbf{y}^0 = b_i$ și $J(\mathbf{y}^0)$ submulțimea indicilor j astfel că $y_j^0 = 0$. Notăm $g(\mathbf{y}^0)$ gradientul funcției $\psi(\mathbf{y}^0)$ în punctul $\mathbf{y}^0$.

Fie $S(\mathbf{y}^0)$ mulțimea vectorilor $\mathbf{s} \in E^n$ definită de :

$$S(\mathbf{y}^0) = \{\mathbf{s} \mid \mathbf{a}_i \mathbf{s} \leq 0; i \in I(\mathbf{y}^0); s_j \geq 0, j \in J(\mathbf{y}^0)\}. \quad (7.2)$$

Vom numi *direcție posibilă eficientă* un vector $\mathbf{s}$ care îndeplinește condițiile :

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &\in S(\mathbf{y}^0), \\ g(\mathbf{y}^0)' \mathbf{s} &\geq 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Se vede din (7.2) și (7.3) că deplasându-ne din $\mathbf{y}^0$ într-o direcție $\mathbf{s}$ care satisface (7.3) și alegînd convenabil lungimea pasului λ condițiile

restrictive (7.1) vor fi verificate de $y = y^0 + \lambda s$, iar $\psi(y)$ nu va descrește. Rezolvăm următoarea problemă de programare liniară :

$$\max_s g(y^0)'s, \quad (7.4)$$

condițiile restrictive fiind

$$\begin{aligned} s &\in S(y^0), \\ -1 &\leq s_j \leq 1 \quad (1 \leq j \leq n). \end{aligned} \quad (7.5)$$

În (7.5) s-a introdus normarea $-1 \leq s_j \leq 1$ pentru a evita soluțiile infinite.

Fie s^* o soluție a acestei probleme de programare liniară.

Dacă $g'(y^0)'s^* = 0$, $\psi(y)$ are un maxim în y^0 . Dacă $g'(y)s^* > 0$ determinăm lungimea λ a pasului.

Pentru aceasta fie

$$\lambda' = \max \{ \lambda | y^0 + \lambda s \in Y \}.$$

Se verifică ușor că

$$\lambda' = \min (\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3)$$

unde

$$\begin{aligned} \lambda'_1 &= \min_i \frac{b_i - a_i y^0}{a_i s^*} \quad (i \in I - I(y^0)) \\ \lambda'_2 &= \max_j \left(\frac{-y_j^0}{s_j^*} \right) (s^* > 0, j \in J - J(y^0)) \\ \lambda'_3 &= \min_j \left(\frac{y_j}{-s_j^*} \right) (s^* < 0, j \in J - J(y^0)) \end{aligned} \quad (7.6)$$

Fie de asemenea λ'' dat de :

$$\psi(y^0 + \lambda'' s^*) = \max_{\lambda} \psi(y^0 + \lambda s^*) \quad (7.7)$$

Luăm ca lungime a pasului $\lambda^* = \min (\lambda', \lambda'')$ și determinăm noua soluție $y^1 = y^0 + \lambda^* s^*$.

Procedeul se repetă, dacă $\psi(y)$ nu are în y^1 un maxim. Se arată că procedeul de mai sus este convergent.

Putem determina o soluție inițială y^0 rezolvînd următoarea problemă de programare liniară :

$$\max_{y \in Y} \left(u - \sum_{i=1}^n p_i y_i \right)$$

Fie y^0 o soluție a acestei probleme de programare liniară.

Dacă $u - \sum_{i=1}^n p_i y_i = 0$, y^0 este o soluție maximizantă a problemei (5.1, 5.2)

și aceeași proprietate o au toate punctele hiperplanului $\sum_{i=1}^n p_i y_i = u$ lema 3).

Presupunem că $u - \sum_{i=1}^n p_i y_i^0 \neq 0$.

Putem lua y^0 ca soluție inițială în algoritmul de mai sus. Fie y^1 maximul local obținut cu acest algoritm. Presupunem că avem :

$$\begin{aligned} a_{j1} y_1^1 + \dots + a_{jn} y_n^1 &= b_j & (j \in J), \\ a_{j1} y_1^1 + \dots + a_{jn} y_n^1 &< b_j & (j \in \{1, \dots, m\} - J), \\ y_i &= 0, & (i \in I), \\ y_i &> 0 & (i \in \{1, \dots, n\} - I). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Potrivit lemei 2, y^1 este singurul maxim local în închiderea feței definite de :

$$\begin{aligned} a_{j1} y_1 + \dots + a_{jn} y_n &= b_j & (j \in J), \\ a_{j1} y_1 + \dots + a_{jn} y_n &< b_j & (j \in \{1, \dots, m\} - J), \\ y_i &= 0 & (i \in I) \\ y_i &> 0 & (i \in \{1, \dots, n\} - I) \end{aligned} \quad (7.9)$$

Rezultă inexistența maximelor locale pe fețele care se obțin dacă în (7.9) se înlocuiește în unele dintre relații semnul $<(>)$ cu $=$. Într-adevăr în caz contrariu $\psi(y)$ ar avea în afară de maximul din y^1 , un alt maxim pe frontiera feței (7.9).

De asemenea nu există maxime locale nici pe fețele care se obțin dacă în (7.9) unele dintre semnele $=$ se înlocuiesc cu $<(>)$ căci în caz contrar $\psi(y)$ ar avea un maxim local pe o față de ordin inferior celui corespunzător feței (7.9) și în același timp ar avea un maxim local pe fața (7.9) situată pe frontiera primei.

Fie acum o față $F_{J'I'}$ corespunzătoare mulțimilor de indici $J' \subset \{1, \dots, m\}$, $I' \subset \{1, \dots, n\}$, diferită de oricare dintre fețele luate în considerare pînă acum :

$$\begin{aligned} a_{j1} y_1 + \dots + a_{jn} y_n &= b_j & (j \in J'), \\ a_{j1} y_1 + \dots + a_{jn} y_n &< b_j & (j \in \{1, \dots, m\} - J'), \\ y &= 0_i & (i \in I'), \\ y &> 0_i & (i \in \{1, \dots, n\} - I'). \end{aligned} \quad (7.10)$$

(Presupunem că sistemul 7.10 este compatibil și are o infinitate de soluții).

Putem determina o soluție a acestui sistem utilizând metoda obișnuită pentru inițierea algoritmului direcțiilor posibile convenabil modificată pentru a asigura satisfacerea condițiilor

$$y_i > 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\} - I')$$

(se înlocuiesc aceste condiții cu $y_i + \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv pe care-l putem alege oricît de mic, ținînd însă seama de precizia cu care se fac calculele).

Aplicăm algoritmul direcțiilor posibile alegînd însă de fiecare dată mulțimea S a direcțiilor posibile astfel încît egalitățile din 7.10, să fie verificate; (este suficient ca în 7.2 să se ia semnul = pentru $j \in J'$ și $i \in I'$). În celelalte relații din (7.10) se ia ca de obicei $\leq (\geq)$. Fie y^2 maximul local obținut. Avem :

$$\begin{aligned} a_{j1} y_1^2 + \dots + a_{jn} y_n^2 &= b_j & (j \in J''), \\ a_{j1} y_1^2 + \dots + a_{jn} y_n^2 &< b_j & (j \in \{1, \dots, m\} - J''), \\ y_i &= 0 & (i \in I''), \\ y_i &> 0 & (i \in \{1, \dots, n\} - I''), \end{aligned} \quad (7.11)$$

unde $J'' \supset J'$ și $I'' \supset I'$. Dacă cel puțin una dintre submulțimile J' (I') este o submulțime strictă a mulțimii J'' (I''), y^2 nu aparține feței (7.10) și este unicul maxim situat pe fața (7.11) și frontiera acestei fețe (formată din toate fețele de ordin inferior care se pot obține din (7.11) dacă se înlocuiesc unele dintre inegalități cu egalități).

Dacă $J'' = J'$ și $I'' = I'$ avem două posibilități: 1) y^2 rămîne maxim și după ce (7.10) se înlocuiește cu

$$\begin{aligned} a_{j1} y_1 + \dots + a_{jn} y_k &\leq b_j & (j \in \{1, \dots, m\}) \\ y_i &\geq 0 & (i \in \{1, \dots, n\}). \end{aligned} \quad (7.12)$$

2) y^2 nu este maxim local, dacă restricțiile sînt (7.12) și aplicarea procedurii direcțiilor posibile conduce la un maxim local y^3 . Evident această soluție satisface numai unele dintre egalitățile din (7.10). În acest caz pe fața (7.10) nu există un maxim local. Considerațiile care ne-au permis după determinarea lui y^1 să tragem concluzia că pe anumite fețe nu există maxime locale se aplică din nou. După un număr finit de repetări a acestui procedeu se determină toate maximele locale.

Evident metoda preconizată deși în principiu poate fi aplicată în orice caz, practic ea poate fi utilizată, dacă numărul de restricții nu este prea mare.

Un alt procedeu care se poate utiliza este următorul : fie ε un număr pozitiv care depinde de precizia calculelor :

1. Determinăm y^1 ca mai sus.
2. Calculăm $\psi(y^1)$.

3. Determinăm cu algoritmul direcțiilor posibile un maxim local al funcției $\psi(\mathbf{y})$ restricțiile fiind formate de sistemul (5.2) la care se adaugă restricția

$$\psi(\mathbf{y}) \geq \psi(\mathbf{y}^1) + \varepsilon$$

Fie acest maxim local $\mathbf{y}^2$.

4. Se repetă 2 și 3 înlocuind $\mathbf{y}^1$ cu $\mathbf{y}^2$.

Procedeul se repetă pînă cînd se ajunge la un sistem de restricții incompatibil. În acest caz se reîncepe procedeul luînd ca punct de plecare ultimul maxim și se înlocuiește ε cu $\varepsilon' < \varepsilon$. În acest mod se poate determina maximul absolut cu precizia dorită.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Mihoc Gh.: Unele precizări în legătură cu aplicarea programării liniare, Revista de Statistică nr. 12, 1959, p. 13—18.
- [2] Bereanu B.: Unele aplicații ale programării stocastice în planificare, Consfătuirea Științifică de statistică 1962 p. 95—107, Direcția Centrală de Statistică, București, 1963.
- [3] — : Problema stocastică a transportului I. Cazul costurilor aleatoare, Com. Acad. R.P.R. 4, XIII, p. 325—331.
- [4] — : Problema stocastică a transportului II. Cazul consumurilor aleatoare, Com. Acad. R.P.R. 4, XIII, 1963, p. 332—337.
- [5] — : Asupra programării stocastice, Com. Acad. R.P.R. 6, XIII 1963, p. 517—522.
- [6] — : On stochastic linear programming, I. Distribution problems: a single random variable, Rev. Math. Pures et Appl. 4, 1963, p. 683—697.
- [7] — : Distribution problems and minimum risc solutions in stochastic programming, Comunicare prezentată la Colocviul asupra aplicațiilor matematicii în economie, Budapesta, iunie 1963 (sub tipar).
- [8] Iosifescu M., Theodorescu R.: Asupra programării liniare stocastice, Com. Acad. RPR., 3, XII, 1962, p. 299—302
- [9] — : Sur la programmation linéaire, C. R. Acad. Sc. t. 256, 1963, p. 4831—4833, Paris.
- [10] Munteanu E., Rado F.: Calculul șarjelor celor mai economice la cuptoarele de topit fontă, Stud. Cerc. Mat. (Cluj) Fascicula anexă, XI, 1961, p. 149—158.
- [11] Martos B.; Hyperbolic Programming, Publ. of the Math. Institute Hungr. Acad. Scie. 4, 1960, p. 383—405
- [12] Charnes A., Cooper W, W, : Programming with linear Fractional Functionals, Nav. Res. Log Quart, 3—4, IX, 1962, p. 181—186.
- [13] Beale E. M.: The simplex method for quadratic programming, Nav. Res. Log. Quart; 6, 1959, p. 227—243.
- [14] Wolfe P.; The simplex method for quadratic programming, Econometrica, 27, 1959, p. 382—398.
- [15] Zoutendijk G.; Methods of feasible directions, Elsevier, Amsterdam 1960.

РЕШЕНИЯ С МИНИМАЛЬНЫМ РИСКОМ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть $\mathbf{e}(\omega)$ случайный вектор определённый соотношением

$$\mathbf{e}(\omega) = \mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 \tau_1(\omega) + \dots + \mathbf{e}^r \tau_r(\omega)$$

где $\mathbf{e}^i$ ($0 \leq i \leq r$) являются n -мерными векторами и $\boldsymbol{\tau}(\omega) = (\tau_1, \dots, \tau_r)$ ограниченный случайный вектор определённый вероятностным пространством $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Пусть X множество решений, предлагаемое непустое и ограниченное, системы

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

где были использованы обыкновенные обозначения линейного программирования.

Некоторые вопросы планирования на предприятии естественно приводят к следующей задаче. Определить n -мерный вектор $\mathbf{x}_u$ максимизирующий на X

$$\psi(\mathbf{x}, u) = P\{\omega \mid \mathbf{e}'(\omega) \leq u\},$$

где u данное действительное число, а P вероятность; $\mathbf{x}_u$ будет называться u -решением с минимальным риском.

Доказывается что если $r = 1$, $\mathbf{e}_1 > 0$ и $\tau_1(\omega)$ имеет непрерывную функцию распределения $F_{\tau_1}(z)$, то $\mathbf{x}_u$ не зависит от $F_{\tau_1}(z)$ и является решением обыкновенной задачи гиперболического программирования.

Далее доказывается, что если $\mathbf{e} = (t_1, \dots, t_n)$ где t_i ($1 \leq i \leq n$) являются нормальными случайными независимыми переменными с параметрами m_i, σ_i , а X не содержит нулевого вектора и определяется неравенствами

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

то u -решение с минимальным риском является решением следующей задачи нелинейного программирования: максимизировать на X функцию

$$\Phi(\mathbf{x}, u) = \frac{u - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}}$$

Если $m_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) то $\mathbf{x}_u$ не зависит от u и получается решая задачу квадратичного программирования. В общем случае $\mathbf{x}_u$ может быть найден методом возможных направлений Зойтендейка [15] и применением лемм 2, 3, 4 расположением локальных максимумов функции $\Phi(\mathbf{x}, u)$ на X .

MINIMUM RISK SOLUTIONS IN LINEAR PROGRAMMING

SUMMARY

Let $\mathbf{e}(\omega)$ be a random vector given by

$$\mathbf{e}(\omega) = \mathbf{e}^0 + \mathbf{e}^1 \tau_1(\omega) + \dots + \mathbf{e}^r \tau_r(\omega)$$

where $\mathbf{e}^i$ ($0 \leq i \leq r$) are n -dimensional vectors and $\boldsymbol{\tau}(\omega) = (\tau_1, \dots, \tau_r)$ is a bounded

random vector on a probability space (Ω, K, P) . Denote X , the set of solutions, supposed nonvoid and bounded of

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0,$$

where usual notations of linear programming are used.

Certain enterprise planning problems lead naturally to the following problem. Find the n - dimensional vector x_u which maximizes on X

$$\psi(x, u) = P\{\omega \mid e'(\omega)x \leq u\},$$

where u is a given real number and P denotes probability. It will be said that x_u is a u - minimum risk solution.

It is proved that if $r = 1$, $e_1 > 0$ and $\tau_1(\omega)$ has a continuous distribution function $F_{\tau_1}(z)$, then x_u does not depend of $F_{\tau_1}(z)$ and it is the solution of an ordinary hyperbolic programming problem.

It is further proved that if $e = (t_1, \dots, t_n)$, where t_i ($1 \leq i \leq n$) are independent normal random variables with parameters m_i , σ_i , and X does not contain the nul vector and is determined by

$$Ax \leq b,$$

$$x \geq 0,$$

then the u - minimum risk solution is a solution of the following nonlinear programming problem: maximize on X the function

$$\Phi(x, u) = \frac{u - \sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 x_i^2}}$$

If $m_i = 0$ ($1 \leq i \leq n$) then x_u is independent of u and is obtained by solving a quadratic programming problem. In the general case, x_u can be determined by Zoutendijk's method of feasible directions [15] using the lemmas 2, 3, 4, on the situation of the local maxima of $\Phi(x, u)$ on X .

UN TIP DE MIȘCĂRI AXIAL SIMETRICE ROTAȚIONALE PENTRU FLUIDE INCOMPRESIBILE

ION I. CRISTEA

1. Definiție

Bazîndu-ne pe metoda *semiinversă* imaginată de autor în [1], vom presupune că câmpul vitezelor $\vec{v}$ ale moleculelor unui fluid se prezintă sub forma

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi + ar^2 \text{grad } z \quad (1)$$

unde $\varphi = \varphi(r, \theta, z, t)$ este o funcție de timpul t și de coordonatele cilindrice r, θ, z ale punctului M în care este plasată molecula de fluid considerată, la momentul t , iar $a = a(t)$ o funcție de timpul t .

Notînd cu x, y, z coordonatele carteziene ale punctului M , legătura între aceste coordonate și coordonatele cilindrice r, θ, z ale punctului M este dată de relațiile

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

sau

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Notînd cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ versorii axelor de coordonate carteziene și cu $\vec{\rho}, \vec{\varepsilon}, \vec{k}$ versorii liniilor de coordonate în sistemul de coordonate cilindrice, cum

$$\text{grad } r = \frac{x}{r} \vec{i} + \frac{y}{r} \vec{j}, \quad \text{grad } \theta = -\frac{y}{r^2} \vec{i} + \frac{x}{r^2} \vec{j}, \quad \text{grad } z = \vec{k},$$

urmează că

$$\text{grad } r = \vec{\rho}, \quad \text{grad } \theta = \frac{1}{r} \vec{\varepsilon}, \quad \text{grad } z = \vec{k}$$

Evident

$$\vec{\rho} \cdot \vec{\varepsilon} = 0, \quad \vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{\rho} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{\rho} \times \vec{\varepsilon} = \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} \times \vec{k} = \vec{\rho}, \quad \vec{k} \times \vec{\rho} = \vec{\varepsilon}.$$

Reprezentarea (1) se mai scrie

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi + ar^2 \vec{k}. \quad (1)$$

Cum însă

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{\rho} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \vec{\varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

componentele lui $\vec{v}$ pe liniile de coordonate cilindrice sînt

$$v_{\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_{\varepsilon} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + ar^2 \quad (1'')$$

Conform cu (1) avem

$$\text{rot } \vec{v} = 2ar \text{ grad } r \times \text{grad } z \quad (2)$$

încît ecuațiile liniilor de vîrtej sînt

$$r = \text{const.}, \quad z = \text{const.} \quad (3)$$

astfel că aceste linii de vîrtej sînt cercurile cu centrul pe axa Oz , ($x = 0$, $y = 0$), al căror plan este perpendicular pe Oz .

Relația (3) se mai scrie

$$\text{rot } \vec{v} = 2ar \vec{\rho} \times \vec{k} = -2ar \vec{\varepsilon} \quad (2')$$

încît vectorul turbion $\vec{\xi} = \text{rot } \vec{v}$ are modulul același pentru $r = \text{const.}$, adică pe suprafețele cilindrice de rotație cu generatoarele paralele la Oz :

$$|\text{rot } \vec{v}| = 2ar.$$

Cum $\vec{\xi} = \text{rot } \vec{v}$ are direcția lui $\vec{\varepsilon}$, direcția turbionului variază de la un punct la altul, ea rămînînd aceeași în lungul paralelelor la Oz . Din (2') urmează că componentele pe liniile de coordonate cilindrice sînt

$$\xi_{\rho} = 0, \quad \xi_{\varepsilon} = -2ar, \quad \xi_z = 0 \quad (2'')$$

2. Ecuațiile de mișcare

Mișcarea unui fluid perfect incompresibil sub acțiunea unor forțe de masă conservative este caracterizată de ecuațiile lui Euler care le vom scrie sub forma lui Helmholtz:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \text{grad } B, \quad B = U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 \quad (4)$$

și ecuația de continuitate

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (5)$$

unde p este presiunea fluidului iar ρ densitatea sa.

În baza lui (2')

$$\text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = -2 a r \vec{\varepsilon} \times \vec{v} = 2 a r v_{\varphi} \vec{k} - 2 a r v_z \vec{\rho}$$

încît proiectînd ecuația vectorială (4) pe direcțiile lui $\vec{\rho}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{k}$ obținem

$$\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} - 2 a r v_z = \frac{\partial B}{\partial r}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} + 2 a r v_{\varphi} = \frac{\partial B}{\partial z} \quad (4')$$

Însă în ecuația (4) simbolul $\frac{\partial}{\partial t}$ desemnează derivarea în raport cu timpul cînd vectorul de poziție $\vec{r}$ este fix, adică pentru x, y, z sau r, θ, z constanți. Conform cu (1'') avem atunci

$$\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \dot{a} r^2$$

unde $\dot{a}$ înseamnă derivata lui a în raport cu timpul t . Ecuațiile (4') se vor scrie

$$2 a r v_z = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - B \right), \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - B \right), \quad 2 a r v_{\varphi} + \dot{a} r^2 = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - B \right)$$

sau încă

$$2 a r v_z = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad 2 a r v_{\varphi} + \dot{a} r^2 = - \frac{\partial H}{\partial z} \quad (4'')$$

unde am pus

$$H = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - B = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} - U \quad (6)$$

Așa cum am arătat în [2] funcția H astfel introdusă are interpretarea unui *hamiltonian*.

Din a doua ecuație (4'') reiese că

$$H = H(r, z, t) \quad (7)$$

ceea ce conform cu cele tratate în [1] și [2] revine la a spune că la orice moment t fixat, suprafețele

$$H = \text{const.} \quad (8)$$

sînt niște *suprafețe de vîrtej*. De altfel acest lucru rezultă și direct căci liniile de vîrtej sînt caracterizate de (3).

Eliminînd funcția H între prima și ultima ecuație (4'') obținem

$$a \left[\frac{\partial (r v_{\varphi})}{\partial r} + \frac{\partial (r v_z)}{\partial z} \right] + \dot{a} r = 0 \quad (9)$$

Ori ecuația de continuitate (5) în coordonate cilindrice dă

$$\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial(r v_z)}{\partial z} = 0 \quad (5')$$

astfel că în baza lui (9) avem

$$a \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \dot{a} r \quad (10)$$

Ecuatiile (4'') și (10) conform cu (1'') devin

$$2 a r \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + a r^2 \right) = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad 2 a r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \dot{a} r^2 = - \frac{\partial H}{\partial z}$$

$$a \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \dot{a} r$$

Din ultima din aceste ecuații urmează că φ este o funcție de forma

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} r^2 \theta^2 + \varphi_0(r, z, t) \cdot \theta + \Phi(r, z, t)$$

Ori cum H nu depinde de θ , derivatele

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\dot{a}}{a} r \theta^2 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \cdot \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

de asemenea nu depind de θ , încît

$$\dot{a} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0.$$

Deci a fiind o constantă, modulul vectorului turbion $\vec{\xi} = \text{rot } \vec{v}$ într-un punct dat nu variază în timp. În același timp, φ_0 nu depinde de r și z , adică $\varphi_0 = \varphi_0(t)$. Prin urmare, funcția φ este de forma

$$\varphi = \varphi_0(t) \cdot \theta + \Phi(r, z, t) \quad (11)$$

Cum a este constant ecuațiile (4'') vor da

$$2 a r v_z = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad 2 a r v_r = - \frac{\partial H}{\partial z} \quad (4''')$$

Ori la un moment t dat, liniile de curent se caracterizează prin

$$\frac{\delta r}{v_r} = \frac{\delta \theta}{v_z} = \frac{\delta z}{v_z}$$

astfel că în baza ecuațiilor (4''') la orice moment t fixat suprafețele (8) sînt și suprafețe de curent. Deci suprafețele (8) sînt niște suprafețe *Bernoulli-Válcovici* [3], [4], [5], [6], [1], [2].

În virtutea lui (10) componentele (1'') ale lui $\vec{v}$ devin

$$v_p = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_z = \frac{1}{r} \varphi_0(t), \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + a r^2 \quad (12)$$

iar ecuațiile (4''') :

$$2 a r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + a r^2 \right) = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad 2 a r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{\partial H}{\partial z} \quad (13)$$

Să scriem ecuațiile (13) sub forma

$$2 a r \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(H - \frac{1}{2} a^2 r^4 \right), \quad 2 a r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{\partial}{\partial z} \left(H - \frac{1}{2} a^2 r^4 \right) \quad (13')$$

și să punem

$$H = \frac{1}{2} a^2 r^4 - 2 a \Psi(r, z, t). \quad (14)$$

Deci în locul ecuațiilor (13) vom avea

$$r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad r \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (15)$$

ecuații ce corespund ecuațiilor lui Stokes din cazul mișcărilor irotaționale axial simetrice. De altfel în cazul cînd $a = 0$ sistemul (15) devine chiar sistemul lui Stokes.

Eliminînd funcția Ψ obținem ecuația

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad (16)$$

ceea ce înseamnă că funcția $\Phi = \Phi(r, z, t) = \Phi(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t)$ ca funcție de x, y, z este armonică :

$$\Delta \Phi = 0$$

(x, y, z)

Eliminînd din (15) pe Φ obținem și ecuația

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = 0 \quad (17)$$

Cu ajutorul funcției Ψ ecuația (8) a suprafețelor Bernoulli-Vâlcovici se mai scrie

$$\Psi - \frac{1}{4} a r^4 = \text{const.} \quad (8')$$

3. Condiții ca mișcarea să fie axial simetrică

Dat fiind că viteza $\vec{v}$ nu depinde de unghiul θ , conform cu (6) avem

$$p = \rho \left(U - \frac{1}{2} V^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + H \right)$$

sau în baza lui (11)

$$p = \rho \left[U - \varphi'_0(t) \cdot \theta - \frac{1}{2} V^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \right].$$

Pentru ca și presiunea p să nu depindă de unghiul θ , adică distribuția presiunilor să fie simetrică în jurul lui Oz , este necesar și suficient ca funcția de forță U să fie de forma

$$U = \varphi'_0(t) \cdot \theta + U_0(r, z, t) \quad (18)$$

Atunci

$$p = \rho \left(U_0 - \frac{1}{2} V^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \right) \quad (19)$$

Să alegem în particular cazul când forțele de masă sînt simetric distribuite față de Oz ; adică

$$U = U(r, z, t). \quad (18')$$

Aceasta înseamnă că $\varphi'_0(t) = 0$ și deci $\varphi_0(t) = b$ (const.). În acest caz

$$v_z = \frac{b}{r} \quad (20)$$

iar

$$V^2 = \frac{1}{4a^2r^2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 + 4a^2b^2 \right]. \quad (21)$$

Pentru $b \neq 0$ cu cît ne apropiem de axa Oz cu atît viteza lineară de rotație v_z a fluidului în jurul acestei axe este mai mare, la limită pentru $r \rightarrow 0$ avînd $v_z \rightarrow \infty$. Mișcarea are o alură turbionară de rotație uniformă în jurul lui Oz .

Dacă $b = 0$, atunci $v_z = 0$ încît și planele $\theta = \text{const.}$ sînt suprafețe de curent. Așadar, în acest caz liniile de curent sînt curbe situate în planele meridiene ale căror ecuații sînt

$$\theta = \text{const. și } H(r, z, t) = \text{const.} \quad (22)$$

Caracterul bidimensional pe care-l capătă mișcarea fluidului este posibil dacă la momentul inițial mărimile mecanice ce descriu mișcarea fluidului nu depind de θ , adică

$$v_\rho \Big|_{t=t_0} = v_\rho^0(r, z), \quad v_z \Big|_{t=t_0} = \frac{v_z^0}{r}, \quad v_z \Big|_{t=t_0} = v_z^0(r, z), \quad p \Big|_{t=t_0} = p^0(r, z) \quad (22)$$

astfel că $b = v_z^0$. De asemenea în cazul cînd domeniul ocupat de fluid este nelimitat, la mari distanțe mișcarea trebuie să prezinte simetrie față de Oz .

În fine dacă fluidul este în contact cu o suprafață (S) rigidă și impermeabilă, cum moleculele de fluid trebuie să alunece pe această suprafață, urmează că

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v^t \cdot \vec{n} \quad \text{pe } (S) \quad (24)$$

unde $\vec{v}^t$ este viteza de transport a unui punct solidar legat de suprafața (S) iar $\vec{n}$ versorul normalei la (S) în acest punct.

Dacă $f(r, \theta, z, t) = 0$ este ecuația suprafeței (S) avem

$$\vec{n} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$$

și deci cu ajutorul componentelor pe direcțiile $\vec{\rho}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{k}$ condiția la limită (24) se mai scrie :

$$(v_\rho - v_\rho^t) \frac{\partial f}{\partial r} + (v_z - v_z^t) \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + (v_z - v_z^t) \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{pe } (S) \quad (24')$$

Deci pentru ca variabila θ să nu intervină în (24') este necesar ca $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ și ca v_ρ^t și v_z^t să fie funcțiuni doar de r , z și t . Cu alte cuvinte ecuația suprafeței (S) este de forma $f(r, z, t) = 0$, adică suprafața (S) este simetrică în raport cu axa Oz la orice moment t .

Fie P și Q două puncte pe suprafața (S) . Între vitezele de transport ale acestor două puncte avem relația

$$\vec{v}_P^t = \vec{v}_Q^t + \vec{\omega} \times \vec{QP} \quad (25)$$

unde $\vec{\omega}$ este vectorul ce desemnează rotația instantanee a suprafeței (S) . Să presupunem în particular că punctele P și Q sînt situate pe aceeași paralelă la Oz . În acest caz în baza simetriei de rotație a mișcării suprafeței (S) avem $\vec{v}_P^t = \vec{v}_Q^t$ încît $\vec{\omega} \times \vec{QP} = 0$, adică $\vec{\omega}$ este paralel la Oz . Vom scrie deci $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Fie atunci O' un punct pe axa instantanee de rotație a suprafeței (S) . Avem $\vec{v}_{O'}^t = v_{O',z}^t \vec{k}$. Apoi conform relației (25), pentru orice punct P al suprafeței (S)

$$\vec{v}_P^t = \vec{v}_{O'}^t + \vec{\omega} \times \vec{O'P} \quad (25')$$

Proiectînd această relație pe axele Ox , Oy , Oz obținem

$$v_{Px}^t = -\omega(y_P - y_{O'}), \quad v_{Py}^t = \omega(x_P - x_{O'})$$

$$v_{Pz}^t = v_{O',z}^t$$

încît modulul vitezei $\vec{v}_P'$ este dat de

$$|\vec{v}_P'|^2 = \omega^2[(x_P - x_{O'})^2 + (y_P - y_{O'})^2] + (v_{O'z}')^2$$

Ori

$$x_{O'} = r_{O'} \cos \theta_{O'}, \quad y_{O'} = r_{O'} \sin \theta_{O'}$$

$$x_P = r_P \cos \theta_P, \quad y_P = r_P \sin \theta_P$$

astfel că

$$|\vec{v}_P'|^2 = \omega^2[r_P^2 + r_{O'}^2 - 2 r_P r_{O'} \cos(\theta_P - \theta_{O'})] + (v_{O'z}')^2$$

În baza simetriei față de Oz a mișcării suprafeței (S), cum $|\vec{v}_P'|$ oricare ar fi P nu trebuie să depindă de θ_P urmează neapărat că $\vec{r}_{O'} = 0$, adică punctul O' se află pe axa Oz . Așadar, pentru ca mișcarea fluidului să prezinte simetrie de rotație față de Oz , este necesar ca suprafața (S) în contact cu care este fluidul să fie ea însăși cu simetrie axială față de Oz iar elementele sale să poată fi afectate doar de o translație paralelă cu Oz și o rotație în jurul lui Oz .

Admițînd astfel că O' este pe Oz , proiectînd relația (25') pe direcțiile lui $\vec{\rho}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{k}$ obținem

$$v_{P\rho} = 0, \quad v_{P\varepsilon} = \omega r, \quad v_{Pz} = v_{O'z}'. \quad (26)$$

În cazul cînd suprafața (S) în contact cu care este fluidul este și deformabilă condițiile cele mai generale ce dau independența mișcării de unghiul θ se exprimă mai dificil.

Pe figura 1 se citește că componentele normale exterioare $\vec{n}$ la suprafața (S) sînt

$$n_\rho = \frac{dr}{dn} = -\frac{dz}{ds}, \quad n_\varepsilon = 0, \quad n_z = \frac{dz}{dn} = \frac{dr}{ds} \quad (27)$$

Atunci condiția la limită (21) în baza relațiilor (4''') și (26) se mai scrie

$$\frac{1}{2ar} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{ds} \right) = v_{O'z}' \frac{dr}{ds}$$

adică

$$\frac{dH}{ds} = 2 ar v_{O'z}' \frac{dr}{ds}$$

sau încă

$$H = a v_{O'z}' r^2 + \text{const. pe } (S) \quad (28)$$

În particular dacă suprafața (S) are doar mișcare de rotație în jurul axei sale de simetrie Oz , adică $v_{O'z}' = 0$, condiția la limită (28) se reduce la

$$H = \text{const. pe } (S) \quad (28')$$

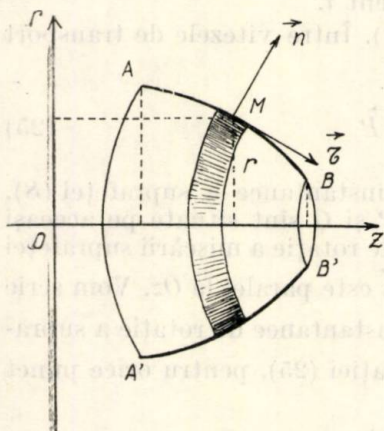


Fig. 1

Cu alte cuvinte, în cazul rotației sale în jurul axei Oz , suprafața (S) este o suprafață Bernoulli-Vâlcovici. Cu atât mai mult suprafața (S) este o suprafață Bernoulli-Vâlcovici când ea este fixă, adică și $\omega = 0$.

4. Cazul fluidelor viscoase incompresibile

Ecuția de continuitate (5) va caracteriza în continuare mișcarea fluidului, însă ecuațiile lui Euler se vor înlocui cu ecuațiile lui Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \text{grad } B + \frac{\lambda + \mu}{\rho} \text{grad } (\text{div } \vec{v}) + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (29)$$

unde de asemenea

$$B = U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2$$

iar λ și μ coeficienți lui Lamé ai fluidului.

Conform cu (5) ecuația (29) se reduce la

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \text{grad } B + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (29')$$

În baza reprezentării (1') apoi

$$\Delta \vec{v} = \text{grad } (\Delta \varphi) + 4a\vec{k}, \text{ căci } \Delta(ar^2 \text{grad } z) = 4a\vec{k}$$

astfel că ecuația (29') se reduce mai departe la

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \text{grad } B^* + \frac{4\mu a}{\rho} \vec{k} \quad (29'')$$

unde de data aceasta

$$B^* = B + \frac{\mu}{\rho} \Delta \varphi = U - \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} V^2 + \frac{\mu}{\rho} \Delta \varphi$$

Prin urmare tratarea cazului mișcărilor viscoase pentru care distribuția de viteze este de tipul (1) este oarecum analogă ca în cazul mișcărilor fluidelor perfecte, funcția B a lui Bernoulli și Vâlcovici înlocuindu-se cu funcția B^* , funcția H cu

$$H^* = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - B^* = H - \frac{\mu}{\rho} \Delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 + \frac{p}{\rho} - \frac{\mu}{\rho} \Delta \varphi - U, \quad (6')$$

iar ecuația (29'') luînd locul ecuației (4).

Din ecuația de continuitate (5) conform cu reprezentarea (1) și cum $\operatorname{div} (ar^2 \operatorname{grad} z) = 0$, rezultă însă

$$\Delta \varphi = 0, \\ (x, y, z)$$

astfel că

$$B^* = B \text{ și } H^* = H$$

ca și în cazul fluidului perfect.

Ecuațiile de mișcare în acest caz vor fi

$$2ar v_z = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad 2ar v_r = -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{4\mu a}{\rho} \quad (4'')$$

astfel că funcția φ este de asemenea de forma (11). Avem atunci

$$2ar \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + ar^2 \right) = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad 2ar \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{4\mu a}{\rho} \quad (13'')$$

încît punînd de data aceasta

$$H = \frac{4\mu a}{\rho} z + \frac{1}{2} a^2 r^4 - 2a \Psi^*(r, z, t) \quad (14')$$

ajungem tot la ecuațiile (15)

$$r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial z}, \quad r \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial r} \quad (15')$$

ceea ce face ca funcția Φ să fie, în raport cu variabilele x, y, z , de asemenea armonică.

Din (4'') se citește că suprafețele

$$H - \frac{4\mu a}{\rho} z = \text{const.} \quad (30)$$

sînt suprafețele de curent ce corespund în cazul fluidului viscos suprafețelor (8) ale lui Bernoulli-Vâlcovici din cazul fluidului perfect. Se observă că suprafețele (30), fiind și suprafețe de vîrtej, sînt de asemenea niște suprafețe Bernoulli-Vâlcovici. Conform cu (14') ecuațiile acestor suprafețe se mai scriu

$$\Psi^* - \frac{1}{4} ar^4 = \text{const.} \quad (30')$$

ecuații care au aceeași formă ca și ecuațiile (8') din cazul fluidelor perfecte.

Condițiile inițiale trebuie să se prezinte sub aceeași formă (23). De asemenea se păstrează forma condițiilor la mari distanțe în cazul cînd fluidul este nelimitat. Condițiile la limită vor fi însă altele, căci fluidul fiind acum viscos el va adera la pereții în contact cu care se află. Deci

$$\vec{v} = \vec{v}^l \text{ pe } (S) \quad (31)$$

suprafața (S) fiind de asemenea simetrică față de axa Oz și putînd eventual să aibă o mișcare de rototranslație de-a lungul lui Oz .

Proiectată pe direcțiile lui $\vec{\rho}$, $\vec{\varepsilon}$, $\vec{k}$ condiția la limită (31) se transcrie

$$v_{\rho} = 0, \quad v_{\varepsilon} = \omega r, \quad v_z = v'_{O'z} \quad \text{pe } (S) \quad (31')$$

ceea ce conform cu (12) și (13') revine la

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{4\mu a}{\rho}, \quad \frac{1}{r} \varphi_0(t) = \omega r, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = 2arv'_{O'z} \quad \text{pe } (S) \quad (31'')$$

Ori condiția a doua din (31'') nu este posibilă decît în următoarele cazuri

— ori ecuația suprafeței (S) se reduce la $r = r_0 = \text{const.}$, adică este un cilindru circular cu generatoarele paralele la Oz avînd pe Oz ca axă de simetrie; în care caz $\varphi_0(t) = \omega(t) \cdot r_0^2$,

— ori ecuația suprafeței (S) nu se reduce la $r = \text{const.}$ și ca atare neapărat $\varphi_0(t) \equiv 0$ și $\omega(t) \equiv 0$, astfel că suprafața (S) nu poate avea decît o mișcare de translație în lungul lui Oz .

În acest ultim caz din (12) avem

$$v_{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_{\varepsilon} = 0, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + ar^2 \quad (12')$$

și deci planele meridiane sînt suprafețe de curent.

Pentru determinarea presiunii p rămîne în vigoare formula (19).

5. Expresia fluxului și a circulației

Fie un arc de curbă $\widehat{AB}$ în planul meridian zOr și să considerăm zona de rotație (S) generată de acest arc $\widehat{AB}$ prin rotația sa în jurul lui Oz . Fluxul prin această zonă de rotație (S) va fi

$$Q = \iint_S \rho v_n d\sigma = \int_{\widehat{AB}} \rho v_n \cdot 2\pi r ds = 2\pi \rho \int_{\widehat{AB}} r v_n ds$$

căci am considerat zona (S) formată din elemente de arie zonică $d\sigma = 2\pi r ds$ descrise prin rotație în jurul lui Oz de un element de lungime ds al arcului $\widehat{AB}$, r fiind distanța de la centrul elementului ds la Oz . Ori analog ca mai înainte, în baza formulelor (4''') și (27) avem

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2ar} \left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{ds} \right) = \frac{1}{2ar} \frac{dH}{ds}$$

încît fluxul Q va avea expresia

$$Q = 2\pi \rho \int_{\widehat{AB}} r \left(\frac{1}{2ar} \frac{dH}{ds} \right) ds = \frac{\pi}{a} \rho \int_{\widehat{AB}} dH = \frac{\pi}{a} \rho H \Big|_{\widehat{AB}}$$

și deci avem formula

$$Q = \frac{\pi}{a} \rho (H_B - H_A) \quad (32)$$

unde prin H_A și H_B s-au notat valorile funcției H în punctele A respectiv B .

Pe această expresia lui Q se observă că dacă arcul $\widehat{AB}$ este situat pe o suprafață Bernoulli-Vâlcovici, pe această suprafață avînd $H = \text{const.}$, urmează că avem $Q = 0$, cum era de așteptat.

Să calculăm acum *circulația* vectorului $\vec{v}$ de-a lungul unui arc de curbă $\widehat{AB}$ care nu este neapărat situat într-un plan meridian zOr . Dacă $\varphi_0(t) = 0$, avem

$$\Gamma = \int_{\widehat{AB}} \vec{v} \cdot \delta \vec{r} = \int_{\widehat{AB}} v_\rho \delta r + v_z \delta z$$

sau conform cu (12) :

$$\Gamma = \int_{\widehat{AB}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \delta r + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + ar^2 \right) \delta z = \int_{\widehat{AB}} \delta \Phi + ar^2 \delta z$$

adică

$$\Gamma = (\Phi_B - \Phi_A) + a \int_{\widehat{AB}} r^2 \delta z \quad (33)$$

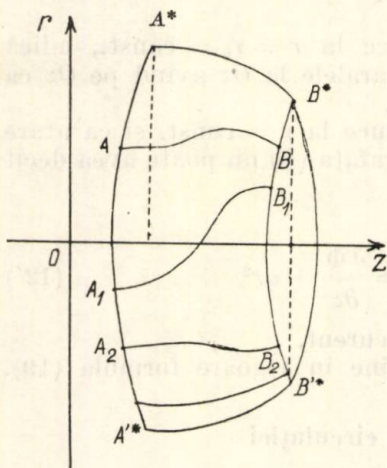


Fig. 2

Dat fiind că variabila θ nu intervine în expresia lui Φ , circulația Γ este aceeași pentru toate arcele $\widehat{AB}$ situate pe suprafața zonică descrisă de $\widehat{AB}$ prin rotație în jurul lui Oz și avînd capetele pe cercurile descrise de A și B în această mișcare de rotație. Putem lua atunci pe $\widehat{AB}$ chiar intersecția acestei suprafețe zonice de rotație cu un plan meridian zOr .

Dacă arcul $\widehat{AB}$ devine o curbă simplă închisă (C) care nu taie axa Oz , notînd cu (C^*) urma într-un plan meridian a suprafeței de rotație descrisă de (C) prin rotirea sa în jurul lui Oz , avem

$$\Gamma = \Phi \Big|_{(C^*)} + a \oint_{C^*} r^2 \delta z$$

Însă conform formulei lui Green aplicată în planul meridian zOr

$$\oint_{C^*} r^2 \delta z = -2 \iint_{D^*} r dr dz = -2r_G \mathcal{A}$$

unde (D^*) este domeniul în planul meridian al curbei (C^*) limitat de această curbă, $\mathcal{A}$ aria lui (D^*) , iar r_G distanța centrului de greutate al domeniului (D^*) la axa Oz . Așa dar,

$$\Gamma = \Phi|_{(C^*)} - 2ar_G \mathcal{A} \quad (33')$$

6. Acțiunea hidrodinamică a fluidului asupra unui perete

Fie $\vec{\mathfrak{R}}$ și $\vec{\mathfrak{M}}_0$ rezultanta forțelor de presiune cu care fluidul acționează asupra unui perete (S) , respectiv momentul resultant al acestor forțe în raport cu punctul O . Presupunem ca mai înainte că suprafața (S) este la orice moment t simetrică față de axa Oz . Avem

$$\vec{\mathfrak{R}} = - \iint_S p \vec{n}_e d\sigma, \quad \vec{\mathfrak{M}}_0 = - \iint_S \vec{r} \times p \vec{n}_e d\sigma \quad (34)$$

unde cu $\vec{n}_e$ am notat versorul normalei la suprafața (S) orientat spre domeniul ocupat de fluid.

Fie (C^*) urma pe care o lasă suprafața (S) într-un plan meridian zOr . Considerind că (S) este formată din elemente de arie de forma $d\sigma = r d\theta ds$ situate pe zona descrisă de elementul ds al lui (C^*) prin rotația acestuia în jurul lui Oz , avem

$$\vec{\mathfrak{R}} = - \int_{C^*} r p ds \int_0^{2\pi} \vec{n}_e d\theta, \quad \vec{\mathfrak{M}}_0 = - \int_{C^*} r p ds \int_0^{2\pi} \vec{r} \times \vec{n}_e d\theta$$

căci am ținut cont în plus că p nu depinde de θ .

Dacă $f(r, z, t) = 0$ este ecuația suprafeței (S)

$$\vec{n}_e = \frac{\partial f}{\partial r} (\cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}) + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

și deci

$$\int_0^{2\pi} \vec{n}_e d\theta = \frac{\partial f}{\partial r} \int_0^{2\pi} (\cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}) d\theta + 2\pi \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} = 2\pi \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{r} \times \vec{n}_e d\theta = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r \cos \theta & r \sin \theta & z \\ \frac{\partial f}{\partial r} \cos \theta & \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} d\theta =$$

$$= \begin{vmatrix} r & z \\ \frac{\partial f}{\partial r} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \int_0^{2\pi} (\sin \theta \cdot \vec{i} - \cos \theta \cdot \vec{j}) d\theta = 0.$$

Aşa dar

$$\vec{\mathfrak{R}} = -2\pi k \int_{C^*} r p \frac{\partial f}{\partial z} ds, \quad \vec{\mathfrak{R}}_0 = 0 \quad (35)$$

astfel că acţiunea hidrodinamică a fluidului asupra unui perete axial simetric (S) se reduce la o forţă unică R dirijată în lungul axei de simetrie Oz .

Din (35), conform cu (27) avem

$$\mathfrak{R}_\rho = \mathfrak{R}_z = 0, \quad \mathfrak{R}_z = -2\pi \int_{C^*} r p n_z ds = -2\pi \int_{C^*} r p dr$$

şi mai departe în baza lui (19)

$$\mathfrak{R}_z = -2\pi \rho \int_{C^*} \left[U_0 - \frac{1}{2} V^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + H \right] r dr. \quad (36)$$

În cazul fluidelor perfecte, dacă (S) este o suprafaţă rigidă şi impermeabilă pe (S), deci şi pe (C), avem condiţia la limită (28). Admiţînd că curba (C) este închisă fără să taie axa Oz sau că este un arc simplu $\widehat{A^*B^*}$ pentru care $r_{A^*} = r_{B^*}$, avem

$$\int_{C^*} H r dr = \int_{C^*} (2a v_{O'z}^2 + \text{const.}) r dr = 0$$

şi deci în acest caz

$$\mathfrak{R}_z = -2\pi \rho \int_{C^*} \left(U_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) r dr + \pi \rho \int_{C^*} V^2 r dr \quad (37)$$

În cazul fluidelor vîskoase, pe suprafaţa (S) vom avea condiţia la limită (31''). Dacă suprafaţa (S) este un cilindru circular cu Oz ca axă de simetrie, adică $r = \text{const.}$, evident $R_z = 0$ şi deci acţiunea fluidului asupra lui (S) este nulă. Dacă însă ecuaţia suprafeţei (S) nu se reduce la $r = \text{const.}$, atunci am văzut că $\omega \equiv 0$ şi $b = 0$, încît în domeniul ocupat de fluid $v_z = 0$. Deci

$$V^2 = \frac{1}{4a^2 r^2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{4\mu a}{\rho} \right)^2 \right]$$

şi conform cu (31')

$$V = v_{O'z}^t \text{ pe } (C^*).$$

Presupunînd şi în acest caz că (C^*) este o curbă simplă închisă sau că este un arc simplu $\widehat{A^*B^*}$ pentru care $r_{A^*} = r_{B^*}$, avem

$$\int_{C^*} V^2 r dr = \int_{C^*} (v_{O'z}^t)^2 r dr = 0$$

În concluzie, în cazul fluidelor viscoase acțiunea fluidului asupra peretelui sau obstacolului (8) este dată de formula

$$\mathfrak{R}_z = -2\pi\rho \int_{C^*} \left(U_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) r dr - 2\pi\rho \int_{C^*} H r dr. \quad (38)$$

7. Un exemplu simplu

Oa și în cazul mișcărilor plane, irotationale [3] sau rotaționale cu vîrtej constant [4], avem la dispoziție o *metodă inversă* de obținere a diverse mișcări fluide axial simetrice rotaționale avînd vîrtejul de mărime proporțională cu r și perpendicular pe planele meridiene ale mișcării.

Pentru aceasta este suficient a ne da o funcție armonică de x, y, z de tipul $\Phi(r, z, t)$, adică soluție a ecuației (16). Găsind conform cu (15) sau (15') funcțiunea $\Psi(r, z, t)$, respectiv funcțiunea $\Psi^*(r, z, t)$, vom putea după (14) sau (14') să scriem expresia hamiltonianului H . Urmele suprafețelor Bernoulli-Vâlcovici ale mișcării într-un plan meridian vor fi date de (8) sau (30'). Celelalte elemente ale mișcării sînt date de formulele (12) și (19) atît în cazul cînd avem de a face cu fluide incompresibile perfecte cît și cu fluide incompresibile viscoase.

Să considerăm în particular funcția

$$\Phi = W_\infty(t) \cdot z + C_1(t) \quad (39)$$

care este evident o soluție a ecuației (16). Din (15) rezultă

$$\Psi = -\frac{1}{2} W_\infty(t) r^2 + C_2(t) \quad (40)$$

astfel că ecuațiile suprafețelor Bernoulli-Vâlcovici sînt

$$W_\infty(t) r^2 + \frac{1}{2} ar^4 = \text{const.} \quad (41)$$

încît aceste suprafețe sînt cilindri circulari cu generatoarele paralele la Oz . Deci proiecțiile liniilor de curent pe un plan meridian sînt paralele la Oz . Componentele vitezei vor fi

$$v_\rho = 0, \quad v_z = \frac{\varphi_0(t)}{r}, \quad v_z = W_\infty(t) + ar^2 \quad (42)$$

încît $W_\infty(t)$ se interpretează ca valoarea proiecției vitezei $\vec{v}$ pe axa Oz de-alungul acestei axe. Din (42) rezultă că viteza $\vec{v}$ a fluidului este constantă pe paralelele la Oz .

Dacă $\varphi_0(t) \equiv 0$, atunci viteza $\vec{v}$ este paralelă cu Oz iar paralelele la Oz sînt chiar linii de curent. Alura mișcării în cazul $a > 0$ este prezentată în fig. 3 *a, b, c*. În cazul fig. 3 *c* avem $W_\infty(t) < 0$ încît la un moment t

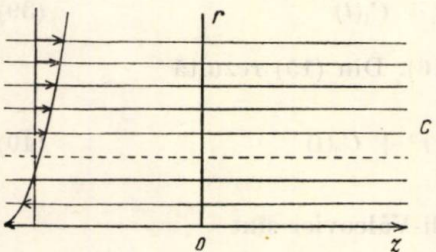
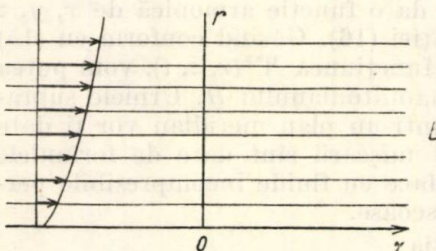
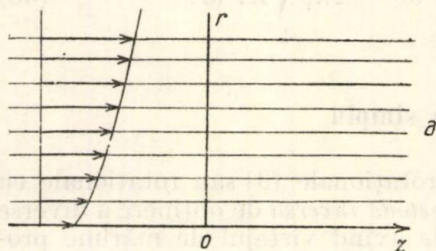


Fig. 3

dat pe cilindrul $W_\infty(t) + a r^2 = 0$ fluidul este în repaus. Presupunind mișcarea permanentă, adică W_∞ este constant în timp, și că fluidul este viscos, conform celor expuse la no. 4 să solidificăm acest cilindru de curent. Obținem astfel mișcarea unui fluid viscos în interiorul unui cilindru circular. Modulul vitezei în această mișcare este

$$V = |W_\infty + a r^2|$$

iar hamiltonianul mișcării

$$H = \frac{1}{2} a^2 r^4 + a W_\infty r^2 - \text{const.}$$

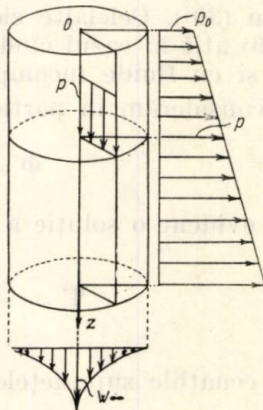


Fig. 4

Deci din (19) deducem valoarea presiunii p :

$$p = \rho \left[U_0 - \frac{1}{2} (W_\infty + a r^2)^2 + \frac{1}{2} a^2 r^4 + a W_\infty r^2 + \text{const.} \right]$$

adică

$$p = \rho U_0 + \text{const.} \quad (43)$$

În cazul unui tub circular cu generatoarele verticale în care circulă un fluid greu, luînd axa tubului orientată cu sensul pozitiv în jos ca axă Oz , avem $U = U_0 = gz$ și deci presiunea fluidului va fi

$$p = \rho g z + p_0 \quad (44)$$

unde p_0 este presiunea fluidului la cota $z = 0$. Se vede dar că într-un plan $z = \text{const.}$ presiunea este constantă și că această presiune variază linear de la un plan la altul. Altfel spus, presiunea p este dată tot de legea fundamentală a hidrostatiei.

În cazul cînd în tub ar circula un fluid fără greutate sau în general cînd forțele de masă se pot neglija, avem $U = U_0 = 0$, încît

$$p = \text{const.} \quad (44')$$

Deci în interiorul fluidului este valabilă legea lui Pascal.

8. Mișcarea în jurul unui obstacol fix

Să presupunem că avem de-a face cu mișcarea axial simetrică a unui fluid perfect care la mari distanțe are o mișcare paralelă cu axa Oz , proiecțiile vitezelor pe Oz variind parabolic cu distanța r la această axă. Deci

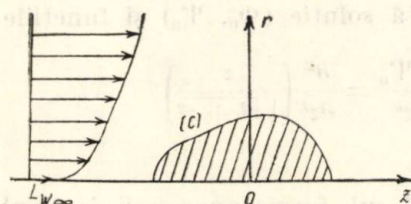


Fig. 5

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} v_p = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} v_z = W_\infty(t) + ar^2 \quad (45)$$

Fie (S) un obstacol axial simetric aflat în calea fluidului, iar (C) urma acestuia într-un plan meridian zOr . Fluidul fiind perfect, pe (C) vom avea condiția la limită (28').

Dacă obstacolul (S) n-ar exista în calea curentului potențialul Φ al vitezelor ar fi dat de (39). De aceea potențialul vitezelor în prezența obstacolului (S) îl vom căuta sub forma

$$\Phi(r, z, t) = W_\infty(t) \cdot z + \Phi^*(r, z, t) \quad (46)$$

încît conform cu (12) condiția la mari distanțe (45) devine

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} = 0 \quad (45')$$

Fie $\Psi(r, z, t)$ funcția asociată lui $\Phi(r, z, t)$ pe baza sistemului (15). Vizibil funcția $\Psi(r, z, t)$ se poate pune sub forma

$$\Psi(r, z, t) = -\frac{1}{2} W_\infty(t) \cdot r^2 + \Psi^*(r, z, t) \quad (47)$$

Deci funcțiile $\Phi^*(r, z, t)$ și $\Psi^*(r, z, t)$ satisfac de asemenea ecuațiilor (15). În plus avem condiția la limită

$$\Psi^*(r, z, t) = \frac{1}{4} ar^4 + \frac{1}{2} W_\infty(t) r^2 + \text{const. pe } (C) \quad (48)$$

iar condiția la mari distanțe (45'), în virtutea faptului că funcțiile Φ^* și Ψ^* satisfac sistemului (15), devine

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} = 0 \quad (45'')$$

Dat fiind că $\Phi^*(r, z, t) = \Phi^*(\sqrt{x^2 + y^2}, z, t)$ ca funcție de x, y, z este armonică, o soluție a ecuației (16) este

$$\Phi_0(r, z) = - \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

conjugata ei conform cu (15) fiind

$$\Psi_0(r, z) = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Observăm apoi că o dată cu această soluție (Φ_0, Ψ_0) și funcțiile

$$\frac{\partial^k \Phi_0}{\partial z^k} = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(- \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right), \quad \frac{\partial^k \Psi_0}{\partial z^k} = \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)$$

sînt soluții ale sistemului (15).

Vom căuta atunci funcțiile Φ^* și Ψ^* sub forma unor serii de tipul

$$\begin{aligned} \Phi^*(r, z, t) &= - \alpha_0(t) \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \\ \Psi^*(r, z, t) &= \alpha_0(t) \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t) \frac{\partial^k}{\partial z^k} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

ecuațiile (15) fiind astfel satisfăcute. De asemenea sînt satisfăcute condițiile la mari distanțe (45') sau (45''). Coeficienții $\alpha_k(t)$, ($k = 0, 1, 2, \dots$) vor fi determinați din condiția la limită (48).

Dacă fluidul ar fi fost viscos, condiția la limită (28') s-ar fi înlocuit cu condiția la limită (31') în care $v_{0,z}^t = 0$ căci obstacolul (S) este fix. Deci condiția la limită (48) s-ar fi înlocuit cu

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{4\mu a}{\rho}, \quad \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad \text{pe } (S)$$

ceea ce conform cu (14) și (47) revine la

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial r} = ar^3 + W_{\infty}(t) \cdot r \quad \text{pe } (C) \quad (50)$$

9. Aplicație în cazul obstacolului sferic

Să presupunem deci că obstacolul (S) este o sferă impermeabilă fixă de rază R și cu centrul în originea O . Deci ecuația curbei (C) este $r^2 + z^2 = R^2$ cu $r \geq 0$.

Considerăm apoi fluidul perfect, vom alege funcțiile Φ^* și Ψ^* considerate în paragraful precedent sub forma (49). Dat fiind că pe curba (C) avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \Big|_{(C)} &= \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \Big|_{(C)} = \frac{r^2}{R^3} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \Big|_{(C)} &= \frac{-3 r^2 z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^5} \Big|_{(C)} = \frac{-3 r^2 z}{R^5} \\ \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \Big|_{(C)} &= \frac{3 r^2 (4 z^2 - r^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^7} \Big|_{(C)} = \frac{3 r^2 (4 R^2 - 5 r^2)}{R^7} \\ \frac{\partial^4}{\partial z^4} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right) \Big|_{(C)} &= \frac{15 r^2 z (3 r^2 - 4 z^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^9} \Big|_{(C)} = \frac{15 r^2 z (7 r^2 - 4 R^2)}{R^9} \\ &\dots \end{aligned}$$

este suficient în (49) să luăm $\alpha_k(t) = 0$ pentru $k = 4, 5, 6, \dots$ și de asemenea $\alpha_0(t) = \alpha_2(t) = 0$. Deci pentru Ψ^* avem

$$\Psi^*(r, z, t) = \alpha_1(t) \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} + \alpha_3(t) \frac{3 r^2 (4 z^2 - r^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^7}$$

încît pe (C):

$$\Psi^*(r, z, t) \Big|_{(C)} = -15 \frac{\alpha_3(t)}{R^7} r^4 + \frac{12 \alpha_3(t) + \alpha_1(t) \cdot R^2}{R^5} r^2$$

Identificînd această expresie cu membrul doi al condiției (48) obținem

$$\alpha_1(t) = R^3 \left(\frac{1}{2} W_\infty(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right), \quad \alpha_3(t) = -\frac{1}{60} a R^7$$

Deci, abstractie de o funcție aditivă depinzînd de timpul t , expresiile funcțiilor Φ^* și Ψ^* sînt

$$\begin{aligned} \Phi^*(r, z, t) &= \left(\frac{1}{2} W_\infty(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right) \frac{R^3 z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} + \frac{1}{20} a \frac{R^7 z (3 r^2 - 2 z^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^7} \\ \Psi^*(r, z, t) &= \left(\frac{1}{2} W_\infty(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right) \frac{R^3 r^2}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} - \frac{1}{20} a \frac{R^7 r^2 (4 z^2 - r^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \end{aligned} \quad (51)$$

Mai departe conform cu (46) și (47) avem și expresiile funcțiilor Φ și Ψ :

$$\begin{aligned}\Phi(r, z, t) &= W_{\infty}(t) \cdot z + \left(\frac{1}{2} W_{\infty}(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right) \frac{R^3 z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} + \\ &+ \frac{1}{20} a \frac{R^7 z (3r^2 - 2z^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^7} + c_1(t), \\ \Psi(r, z, t) &= -\frac{1}{2} W_{\infty}(t) \cdot r^2 + \left(\frac{1}{2} W_{\infty}(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right) \frac{R^2 r^2}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} - \\ &- \frac{1}{20} a \frac{R^7 r^2 (4z^2 - r^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^7} + c_2(t)\end{aligned}\quad (52)$$

unde $c_1(t)$ și $c_2(t)$ sînt funcții arbitrare de timpul t .

În virtutea lui (8) și (14) ecuațiile suprafețelor Bernoulli-Vâlcovici la un moment t fixat sînt

$$\left(\frac{1}{2} W_{\infty}(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right) \frac{R^3 r^2}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} - \frac{1}{20} a \frac{R^7 r^2 (4z^2 - r^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^7} - \frac{1}{2} W_{\infty}(t) \cdot r^2 - \frac{1}{4} a r^4 = h(t) \quad (53)$$

unde $h(t)$ este de asemenea o funcție arbitrară de timpul t . Această ecuație (53) se mai scrie

$$\begin{aligned}r^2 \left\{ \frac{1}{2} W_{\infty}(t) \left[\frac{R^3}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} - 1 \right] - \frac{1}{5} a \frac{R^5}{(\sqrt{r^2 + z^2})^5} \left(\frac{R^2}{r^2 + z^2} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} a r^2 \left[\frac{R^7}{(\sqrt{r^2 + z^2})^7} - 1 \right] \right\} = h(t)\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}r^2 \left(\frac{R^2}{\sqrt{r^2 + z^2}} - 1 \right) \left\{ \frac{1}{2} W_{\infty}(t) \left[\frac{R^2}{r^2 + z^2} + \frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} + 1 \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{5} a \frac{R^5}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \left(\frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} + 1 \right) + \frac{1}{4} a r^2 \left[\frac{R^6}{(r^2 + z^2)^3} + \frac{R^5}{(\sqrt{r^2 + z^2})^5} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^4}{(r^2 + z^2)^2} + \frac{R^3}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} + \frac{R^2}{r^2 + z^2} + \frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} + 1 \right] \right\} = h(t)\end{aligned}\quad (53')$$

Se observă că pentru $h(t) = 0$ regăsim ca suprafețe Bernoulli-Vâlcovici, tocmai axa Oz și sfera dată (S):

$$r = 0 \quad \text{și} \quad \frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} - 1 = 0 \quad (54)$$

În acelaș timp suprafață Bernoulli-Vâlcovici este și suprafața de rotație

$$\frac{1}{2} \frac{W_{\infty}(t)}{a} \left[\frac{R^2}{r^2 + z^2} + \frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} + 1 \right] = \frac{1}{5} \frac{R^5}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} \left(\frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} + 1 \right) -$$

$$- \frac{1}{4} r^2 \left[\frac{R^6}{(r^2 + z^2)^3} + \frac{R^5}{(\sqrt{r^2 + z^2})^5} + \frac{R^4}{(r^2 + z^2)^2} + \frac{R^3}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3} + \right. \quad (54')$$

$$\left. + \frac{R^2}{r^2 + z^2} + \frac{R}{\sqrt{r^2 + z^2}} + 1 \right].$$

Făcînd $\sqrt{r^2 + z^2} = R$ în ecuația (54') obținem

$$r^2 = \frac{2}{35} \left(4 R^2 - 15 \frac{W_{\infty}(t)}{a} \right) \quad (55)$$

Ori cum pe sfera (S) avem $0 \leq r \leq R$, din (55) rezultă că

$$0 < \frac{2}{35} \left(4 R^2 - 15 \frac{W_{\infty}(t)}{a} \right) \leq R^2$$

de unde

$$-\frac{9}{10} R^2 \leq \frac{W_{\infty}(t)}{a} \leq \frac{4}{15} R^2.$$

Am obținut astfel condiția ca suprafața (54') să aibă puncte comune cu sfera (S). Dacă

$$\frac{W_{\infty}(t)}{a} = \frac{4}{15} R^2$$

atunci suprafața (54') are comune cu sfera (S) doar punctele de pe axa Oz fiind conținută în interiorul sferei (S) și tangentă la sfera (S) în aceste puncte. Dacă

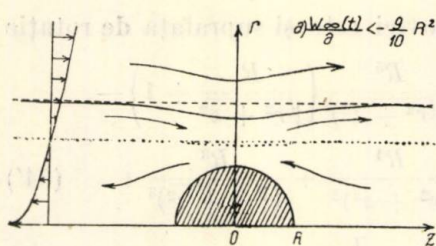
$$\frac{W_{\infty}(t)}{a} = -\frac{9}{10} R^2$$

atunci suprafața (54') este tangentă sferei (S) de-a lungul cercului din planul $z = 0$. Pentru

$$\frac{W_{\infty}(t)}{a} < -\frac{9}{10} R^2$$

suprafața (54') se prezintă sub forma unui tub circular de secțiune variabilă conținînd sfera (S) în interiorul său. În fine, dacă

$$\frac{W_{\infty}(t)}{a} > \frac{4}{15} R^2$$



suprafața (54') nu se întretaie cu sfera (S) fiind în întregime interioară sferei (S). Considerînd că $a > 0$, în Fig. 6 sînt prezentate calitativ aceste cazuri.

Făcînd în ecuația (53) ca $|z| \rightarrow \infty$ obținem ecuațiile cilindrilor asimptotici la suprafețele Bernoulli-Vâlcovici

$$\frac{1}{4} ar^4 + \frac{1}{2} W_{\infty}(t)r^2 + h(t) = 0 \quad (56)$$

Se observă că acești cilindri coincid cu suprafețele Bernoulli-Vâlcovici ale mișcării în cazul cînd sfera (S) nu ar exista în calea fluidului. Pentru $h(t) = 0$ obținem

$$r = 0 \text{ și } r = \sqrt{-2 \frac{W_{\infty}(t)}{a}} \quad (56')$$

Să presupunem pentru simplificare că $\varphi_0(t) \equiv 0$, adică $v_z = 0$ ceea ce face ca mișcarea să fie efectiv

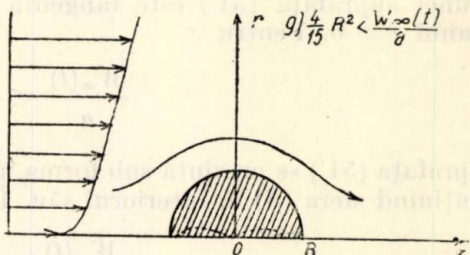
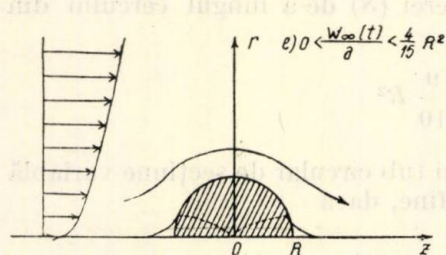
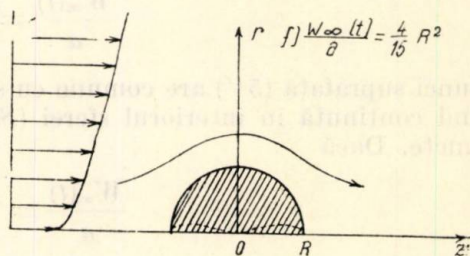
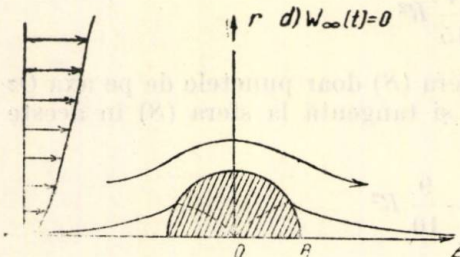
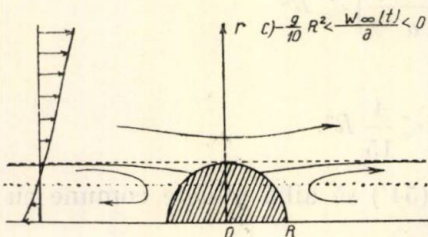
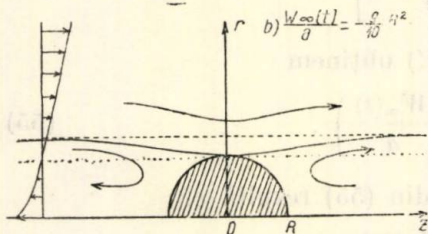


Fig. 6

axial simetrică. Conform cu (12) și (52) componentele vitezei pe direcțiile lui $\vec{\rho}$ și $\vec{k}$ vor fi

$$v_{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \left(\frac{1}{2} W_{\infty}(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right) \frac{3R^3 r z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^5} + \frac{1}{4} a \frac{R^7 r z (4z^2 - 3r^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^9}$$

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + ar^2 = W_{\infty}(t) + ar^2 + \left(\frac{1}{2} W_{\infty}(t) + \frac{1}{5} a R^2 \right) \frac{R^3 (r^2 - 2z^2)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^5} +$$

$$+ \frac{1}{20} a \frac{R^7 (3r^4 - 24r^2 z^2 + 8z^4)}{(\sqrt{r^2 + z^2})^9}$$

valoarea acestor componente v_{ρ} și v_z pe semicercul (C) fiind

$$v_{\rho} \Big|_{(C)} = \frac{7}{4} a \frac{r z}{R^2} \left[r^2 - \frac{2}{35} \left(4R^2 - 15 \frac{W_{\infty}(t)}{a} \right) \right]$$

$$v_z \Big|_{(C)} = - \frac{7}{4} a \frac{r^2}{R^2} \left[r^2 - \frac{2}{35} \left(4R^2 - 15 \frac{W_{\infty}(t)}{a} \right) \right]$$

Se verifică astfel că $\vec{v}$ este tangentă la sfera (S) . Modulul V al vitezei $\vec{v}$ pe această sferă va fi

$$V \Big|_{(C)} = \frac{7}{4} |a| \frac{r}{R} \left| r^2 - \frac{2}{35} \left(4R^2 - 15 \frac{W_{\infty}(t)}{a} \right) \right| \quad (57)$$

Se observă că punctele de pe sfera (S) situate pe axa Oz și pe suprafața (54') sînt puncte de oprire.

Pentru calculul acțiunii hidrodinamice a fluidului asupra sferei (S) folosim formula (37). Astfel conform cu (57) avem

$$\int_{(C)} V^2 r dr = 0$$

Apoi datorită lui (52) avem

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = W'_{\infty}(t) \cdot z + \frac{1}{2} W'_{\infty}(t) \frac{R^3 z}{(\sqrt{r^2 + z^2})^3}$$

și deci pe sfera (S)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{(C)} = \frac{3}{2} W'_{\infty}(t) \cdot z$$

Dacă presupunem axa Oz verticală dirijată în jos și fluidul greu, avem $U_0 = gz$ încît

$$\int_0^{\cdot} \left(U_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) r dr = \left[g - \frac{3}{2} W'_{\infty}(t) \right] \int_0^{\cdot} r z dr = R^3 \left[W'_{\infty}(t) - \frac{2}{3} g \right]$$

Așa dar în acest caz acțiunea fluidului asupra obstacolului sferic (S) este dată de

$$\mathfrak{R}_z = -2\pi\rho R^3 \left[W'_\infty(t) - \frac{2}{3}g \right] = M \left[g - \frac{3}{2} W'_\infty(t) \right] \quad (58)$$

unde cu M am notat masa fluidului deslocuit de obstacolul (S).

Dacă însă fluidul este fără greutate, adică $U_0 = 0$, expresia lui $\mathfrak{R}_z$ se reduce la

$$\mathfrak{R}_z = -\frac{3}{2} M W'_\infty(t) \quad (59)$$

În cazul mișcării permanente, avind $W'_\infty(t) = 0$ din (58) și (59) obținem respectiv

$$\mathfrak{R}_z = Mg \text{ și } \mathfrak{R}_x = 0.$$

În concluzie, acțiunea hidrodinamică a unui fluid perfect în mișcare rotațională în jurul unei sfere (S), la mari distanțe avind o distribuție de viteze de tipul (45) este aceeași ca și cînd mișcarea ar fi irotațională, adică $a = 0$. Astfel, paradoxul lui D'Alembert nu este deloc evitat.

Cum se modifică aceste concluzii în cazul cînd fluidul este viscos vom vedea cu altă ocazie. Pe sfera (S) vom avea condițiile la limită (50) care îngreuiază oarecum determinarea funcțiilor (49).

BIBLIOGRAFIE

- [1] Cristea I. Ion: *Considerarea suprafețelor de vîrtej în studiul mișcărilor rotaționale permanente tridimensionale ale fluidelor perfecte barotrope*, „Analele Universității din București, Seria Științele naturii (mat. — fiz.)”, vol. 34, an XI, 1962, pag. 253—265.
- [2] Cristea I. Ion: *Mecanica analitică a fluidelor perfecte barotrope*, Studia Universitatis Babeș-Bolyai, series Mathematica-Physica, fasciculus 2, 1963, Cluj, pag. 81—94.
- [3] Vălco vici V.: „Sur le mouvement des fluides barotropes”, Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VIII, vol XXI, fasc. 5, 1956, pag. 288—296.
- [4] Vălco vici V.: *Suprafețele Bernoulli*, Studii și cercetări de Mecanică aplicată București, anul XI, nr. 6, 1960, pag. 1507—1533.
- [5] Cristea I. Ion: „Asupra mișcărilor tridimensionale permanente ale fluidelor barotrope” Studii și cercetări matematice, București, anul XIII, nr. 1, 1962 pag. 155—171.
- [6] Cristea I. Ion: „Equations intrinsèques d'un mouvement fluide permanent”, Comptes rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, vol. 2253, nr. 25, 18 dec. 1961, pag. 2843—2845.
- [7] Iacob Caius: „Introduction mathématique à la mécanique des fluides” București-Paris, 1959, pag. 400—425 și pag. 359—366.
- [8] Cristea I. Ion: „O mișcare plană cu vîrtej constant pentru un fluid perfect incompresibil”, Studii cercetări matematice, București, anul XIV, nr. 2, 1963, pag. 253—306.

ОДИН ТИП ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ Вихревых Движений ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Основываясь на представлении (1), где функция φ характеризуется (11), рассматриваются движения несжимаемой жидкости, порождённые этим представлением. Вводя гамильтониан H , уравнения движения записываются в виде (13). Если жидкость совершенна и соприкасается с непроницаемой поверхностью (S), система (13) интегрируется, учитывая граничные условия (28). Если жидкость вязкая, граничное условие на (S) заменяется через (31''). Выражая функцию H в форме (14) уравнения движения сводятся к уравнениям (15), имеющим ту же форму, как и уравнения Стокса для осесимметричных безвихревых движений.

Поверхности (8) являются поверхностями Бернулли-Вылковича. Также и в случае совершенной жидкости непроницаемые и фиксированные поверхности (S), отделяющие область занятой жидкостью, являются, также поверхностями Бернулли-Вылковича.

В работе даются выражения флюкса, циркуляции и гидродинамического действия на стенку или препятствие, расположенных в жидкости.

Изучается движение совершенной несжимаемой жидкости в присутствии непроницаемого неподвижного шара, при скорости на больших расстояниях имеющей выражение (45). Решение этой задачи дано в (52), где можно заметить, что для $a = 0$ получаем решение, соответствующее безвихревому движению.

UN TYPE DE MOUVEMENTS AXIAUX SYMÉTRIQUES ROTOTAIRES POUR DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

R É S U M É

En partant de la représentation (1) où la fonction φ est caractérisée par (11) on étudie les mouvements des fluides incompressibles générés par cette représentation. Par l'introduction du hamiltonien, H les équations de mouvement sont données dans (13). Si le fluide est parfait et en contact avec une surface imperméable (S) le système (13) est intégré à la condition limite (28). Si le fluide est visqueux la condition limite sur (S) est remplacée par (31'').

En exprimant la fonction H sous la forme (14) les équations de mouvement se réduisent aux équations (15) ayant la même forme que les équations de Stokes dans le cas du mouvement axial symétrique irrotationnel.

Les surfaces (8) sont des surfaces Bernoulli-Vălcovici.

De même dans le cas des fluides parfaits les surfaces (S) imperméables et fixes qui délimitent le domaine occupée par le fluide, sont aussi des surfaces Bernoulli-Vălcovici.

Dans ce travail on donne les expressions du flux de la circulation et de l'action hydrodynamique sur une paroi ou bien sur un obstacle placé devant le fluide.

On étudie le mouvement d'un fluide parfait et incompressible autour d'une sphère fixe imperméable aux grandes distances ayant une distribution de vitesse de la forme (45). La solution de ce problème est donnée par (52) ou, pour $a = 0$ on retrouve la solution correspondant au mouvement irrotationnel.

ASUPRA COVARIANȚEI CONFORME

ANATOLIE P. HRISTEV

Grupul conform este constituit din transformările care păstrează *unghiurile*, sau altfel, din transformările punctuale care conservă sferile. Grupul conform al spațiului-timp relativist cuadridimensional pseudoeuclidian (E_4) cuprinde: translațiile, rotațiile spațiale, transformările Lorentz (omogene proprii), oglinzirile coordonatelor, la care se adaugă: transformările „conforme speciale”, dilatările uniforme și inversiunile față de o sferă.

După cum se știe, ecuațiile lui Maxwell sînt covariante nu numai în raport cu grupul Lorentz (10 parametri: 4 translații și 6 rotații în E_4), ci și în raport cu grupul conform general cu 15 parametri (E. Cunningham, H. Bateman, 1910). Ecuațiile mezonice sînt și ele conform covariante (B. Hoffmann 1947, J. Lubanski, L. Rosenfeld 1942). De asemenea, geometria matricelor Dirac este conformă (H. Mandel 1929, K. Nikolski 1930, 1933, J. Schouten, J. Haantjes 1933). Invarianța conformă înseamnă covarianța legilor fizicii în raport cu unitățile de măsură (etaloane) (v. H. Kastrup [6]).

Covarianța conformă prezintă o importanță deosebită în teoria particulelor elementare (de exemplu, ecuația spinorială universală, neliniară a lui Heisenberg). Grupul lui B. Touschek (1957) [7] de transformări ale spinorilor reprezintă grupul dilatărilor uniforme ale spațiului-timp. Inversiunile față de o sferă ne conduc automat la teoria reciprocității a lui M. Born (1937, 1939) (v. de ex. R. Ingraham [6]), adică la simetria legilor fizicii față de permutarea coordonatelor spațio-temporale cu variabilele dinamice impuls-energie.

Grupul conform al unui spațiu E_n este izomorf cu grupul ortogonal al unui spațiu pseudoeuclidian E_{n+2} cu signatură suplimentară $(+ -)$. Alegînd convenabil coordonatele hexasferice (§1), tensorul metric al lui E_{n+2} devine diagonal, lucru care prezintă anumite avantaje. Se dă expresia transformărilor conforme infinitesimale din E_n . Folosind proprietățile covariante (în E_6) ale matricelor Dirac unificate în E_6 [3] [5] se găsesc imediat cele două reprezentări spinoriale cuadridimensionale ale grupului conform propriu (§2). Se dau transformările spinorilor față de diferite

subgrupuri ale grupului conform propriu (§ 3). De exemplu, transformările spinorilor la translații ne conduc la o interacțiune universală 4-fermionică, folosită cu succes în ultimul timp.

Cu ajutorul matricelor Dirac și a cuadrispinorilor se construiesc formele biliniare spinoriale (tensorii Dirac sau de Broglie) care se unifică [2] în E_6 într-un tensor antisimetric $p_{ab} = -p_{ba}$ ($a, b = 1, \dots, 6$), ale cărui componente au semnificația cîmpurilor mezonice (teoria fuziunii). Se dă (§ 4) legea de transformare a acestui tensor față de grupul conform propriu. De exemplu, translațiile „amestecă” cîmpurile mezonice între ele, ceea ce are consecințe importante în teoria forțelor nucleare (reducerea numărului constantelor de cuplaj).

Mai departe se arată cum se unifică operatorii momentelor în E_6 (§ 5). La fel se unifică (§ 6) și variabilele dinamice (energie-impuls, moment cinetic etc.). Se găsește faptul interesant că într-o teorie conformă toate aceste mărimi au o parte „orbitală” („externă”) și o parte „proprie” („internă”). Astfel, nu numai momentul cinetic are o parte orbitală și o parte proprie (de spin), dar și tensorul *energie-impuls* are o parte „orbitală” și una „proprie”, fapt care se datorește „amestecării” componentelor unui tensor conform față de grupul translațiilor.

În sfîrșit, se găsește (§ 7) o legătură interesantă între grupul translațiilor și ecuațiile lui Maxwell (precum și o ecuație spinorială relevantă de K. Nikolski), care apar drept simple consecințe ale anulării variației „locale” a cîmpului p_{ab} la translații.

§ 1. Coordonatele hexasferice și grupul conform

1°. [1] Alegînd în spațiul (pseudo)euclidian E_n (în particular, în spațiul-timp pseudoeuclidian (relativist) E_4) $n + 2$ „sfere” fixe de referință (de bază) avînd ecuațiile într-un sistem de coordonate carteziane omogene z^i, z^{n+1} :

$$\rho \xi^a \equiv A_0^{(a)} \delta_{ij} z^i z^j + 2A_i^{(a)} z^i z^{n+1} + A_{n+1}^{(a)} (z^{n+1})^2 = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho = \text{const} \neq 0; \quad a, b, c, \dots = 1, \dots, n + 2; \quad i, j, k = 1, \dots, n$$

(peste tot se subînțelege suma după indici „muți”, adică după un indice care apare de două ori într-un termen; δ_{ij} coincide cu simbolul lui Kronecker), astfel încît determinantul coeficienților A să fie diferit de zero (sferele să nu aparțină unui sistem), obținem un sistem de coordonate hipersferice (în particular, hexasferice) ξ^a , definite cu aproximația unui factor constant ρ . Ecuația oricărei sfere este atunci o combinație liniară cu coeficienți constanți a coordonatelor hipersferice ξ^a :

$$c_a \xi^a = 0. \quad (1.2)$$

În particular, putem alege ca sfere de bază ale sistemului:

$$\begin{aligned} \rho \xi^i &\equiv 2z^i z^{n+1}, \quad \rho \xi^{n+1} \equiv (z^{n+1})^2 - \delta_{ij} z^i z^j, \quad \rho \xi^{n+2} \equiv i[(z^{n+1})^2 + \delta_{ij} z^i z^j]; \\ \rho(\xi^{n+1} + i\xi^{n+2}) &\equiv -2\delta_{ij} z^i z^j, \quad \rho(\xi^{n+1} - i\xi^{n+2}) \equiv 2(z^{n+1})^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Primele n sfere ξ^i sînt hiperplanele $z^i = 0$ (sfere de rază infinită) (plus planul de la infinit $z^{n+1} = 0$), iar ultimele două sînt sfere de rază reală sau imaginară, după cum $\delta_{ij} z^i z^j$ este de tip „spațial”: $\delta_{ij} z^i z^j > 0$, sau „temporal”: $\delta_{ij} z^i z^j < 0$ pentru sfera ξ^{n+1} , și invers pentru sfera ξ^{n+2} (coordonata ξ^{n+2} este imaginară, la fel ca și ξ^4 din E_4 relativist).

Unui punct z^i (din E_n), considerat ca sferă de rază nulă, îi corespund coordonate hipsferice ξ^a verificînd relația pătratică ce rezultă din (1.3) (condiția ca raza sferei să fie nulă):

$$\delta_{ab} \xi^a \xi^b = 0, \quad (1.4)$$

și reciproc: un sistem dat ξ^a reprezintă un punct (sferă de rază nulă):

$$\frac{x^i}{\lambda} \equiv \frac{z^i}{z^{n+1}} \equiv \frac{\xi^i}{\xi^{n+1} - i \xi^{n+2}}, \quad -\frac{x^2}{\lambda^2} \equiv -\frac{\delta_{ij} z^i z^j}{(z^{n+1})^2} \equiv \frac{\xi^{n+1} + i \xi^{n+2}}{\xi^{n+1} - i \xi^{n+2}} \quad (1.5)$$

$$(x^2 = x_i x^i),$$

dacă este satisfăcută condiția (1.4) (λ — constantă fixă de dimensiunea unei lungimi, introdusă din considerații fizice dimensionale).

Dacă punctul este situat pe hiperconul izotrop (luminos) din E_n fără a fi punct la infinit, atunci

$$\delta_{ij} z^i z^j = 0, \quad z^{n+1} \neq 0: \quad \delta_{ij} \xi^i \xi^j = 0, \quad \xi^{n+2} = i \xi^{n+1} \neq 0. \quad (1.6)$$

Pentru origina sistemului cartezian de coordonate avem

$$z^i = 0, \quad z^{n+1} \neq 0: \quad \xi^i = 0, \quad \xi^{n+2} = i \xi^{n+1} \neq 0. \quad (1.6')$$

Punctele de la infinit nesituate în direcția conului izotrop din E_n au coordonate hipsferice:

$$z^{n+1} = 0, \quad \delta_{ij} z^i z^j \neq 0: \quad \xi^i = 0, \quad \xi^{n+2} = -i \xi^{n+1} \neq 0 \quad (1.6'')$$

și dacă sînt situate în direcția conului izotrop din E_n :

$$z^{n+1} = 0, \quad \delta_{ij} z^i z^j = 0: \quad \xi^a = 0. \quad (1.6''')$$

Unui punct din E_n îi corespunde în E_{n+2} o rază situată pe conul izotrop (1.4) din E_{n+2} :

$$\frac{\xi^1}{x^1} = \dots = \frac{\xi^n}{x^n} = \frac{\xi^{n+1}}{(\lambda - x^2/\lambda):2} = \frac{\xi^{n+2}}{i(\lambda + x^2/\lambda):2}. \quad (1.7)$$

2°. [1] Orice transformare liniară omogenă (nesingulară) a coordonatelor hipsferice:

$$\rho \xi'^a = A^a_b \xi^b \quad (\rho = \text{const} \neq 0, \|A^a_b\| \neq 0) \quad (1.8)$$

transformă sfera (1.2) tot într-o sferă:

$$c'_a \xi'^a = 0, \quad \rho c_a = c'_b A^b_a. \quad (1.8')$$

Pentru ca (1.8) să reprezinte o transformare a punctelor în puncte (în E_n) trebuie ca

$$\delta_{ab} \xi^a \xi^b = 0 \text{ și } \delta_{ab} \xi'^a \xi'^b = 0 \text{ (} \delta_{ab} \xi^a \xi^b = 0 \text{ invariata)}, \quad (1.4')$$

adică condiția (1.4) trebuie să fie conservată; în acest caz (1.8) reprezintă transformările conforme ale spațiului E_n (în particular, ale spațiului-timp relativist E_4). Ele pot fi privite ca transformări liniare într-un spațiu pseudoeuclidian E_{n+2} de semnătură suplimentară $(+ -)$, care invariază hiperconul izotrop $\delta_{ab} \xi^a \xi^b = 0$ (1.4) din acest spațiu.

Din condiția (1.4') rezultă că matricea de transformare A trebuie să fie proporțională cu o matrice ortogonală

$$\rho \xi'^a = A^a_c \xi^c, \quad \delta_{ab} A^a_c A^b_d = \rho^2 \delta_{cd}. \quad (1.9)$$

De oarece coordonatele ξ^a sînt determinate pînă la un factor constant arbitrar, putem spune că transformările (1.9) sînt formate din rotații și ogîndiri în E_{n+2} și reprezintă transformările conforme ale lui E_n , formînd un grup cu $(n+1)(n+2):2$ parametri (în cazul spațiului-timp: 15 parametri).

Considerînd transformările *infinitesimale* (rotațiile), deci infinit de puțin diferite de transformarea identică, putem scrie

$$A^a_b = \delta^a_b + \omega^a_b, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}, \quad (1.10)$$

unde ω_{ab} este unghiul infinitesimal (real sau imaginar) de rotație în planul (ξ^b, ξ^a) și în baza lui (1.9) trebuie să fie antisimetric. Transformările (1.9) devin:

$$\xi'^a - \xi^a \equiv \delta \xi^a = \omega^a_b \xi^b, \quad \omega_{ab} = -\omega_{ba}. \quad (1.11)$$

Din (1.5) rezultă

$$\frac{\delta x^i}{\lambda} = \frac{\delta \xi^i}{\xi^{n+1} - i \xi^{n+2}} - \frac{x^i}{\lambda} \frac{\delta \xi^{n+1} - i \delta \xi^{n+2}}{\xi^{n+1} - i \xi^{n+2}}. \quad (1.12)$$

Introducînd aici (1.11) găsim transformările conforme infinitesimale ale spațiului E_n [5]:

$$\begin{aligned} \delta x^j &= \frac{\lambda}{2} (\omega^{j, n+1} + i \omega^{j, n+2}) + \omega^{jk} x_k - i \omega^{n+1, n+2} x^j + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} (\omega^{k, n+1} - i \omega^{k, n+2}) (2x_k x^j - \delta^j_k x^2), \end{aligned} \quad (1.13a)$$

$$\delta(ds^2) = 2 \left[\frac{1}{\lambda} (\omega^{j, n+1} - i \omega^{j, n+2}) x_j - i \omega^{n+1, n+2} \right] ds^2, \quad (1.13b)$$

$$ds^2 \equiv \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad \delta \ln ds^2 = \delta \ln (\xi^{n+1} - i \xi^{n+2})^2. \quad (1.13c)$$

Cu notațiile

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} (\omega^{j, n+1} + i \omega^{j, n+2}) &\equiv a^j, \quad \omega^{n+1, n+2} \equiv i \vartheta, \\ \frac{1}{2\lambda} (\omega^{j, n+1} - i \omega^{j, n+2}) &\equiv b^j, \end{aligned} \quad (1.14)$$

transformările (1.13) se scriu astfel :

$$\delta x^i = a^i + \omega^{ij} x_j + \vartheta x^i + b^j (2x_j x^i - \delta_j^i x^2), \quad (1.15a)$$

$$\delta(ds^2) = 2(\vartheta + 2b_j x^j) ds^2. \quad (1.15b)$$

3°. Se vede că (1.15) conțin următoarele transformări [5, 6]:

a) Rotațiile ω^{ik} din E_{n+2} dau rotații identice în E_n (cu $n(n-1):2$ parametri). În cazul spațiului-timp E_4 avem *rotațiile spațiale* (3 parametri $\omega^{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta = 1, 2, 3$):

$$\delta x^\alpha = \omega^\alpha_\beta x^\beta, \quad \delta t = 0 \quad (x^4 \equiv ict) \quad (1.16a)$$

și rotațiile spațio-temporale, adică *transformările Lorentz* (3 parametri $v^\alpha/c \equiv -i\omega^{\alpha 4}$):

$$\delta x^\alpha = -v^\alpha t, \quad c\delta t = -v_\alpha x^\alpha. \quad (1.16b)$$

b) Rotația $\omega^{n+1, n+2}$ din E_{n+2} dă o *dilatare uniformă* a spațiului E_n (1 parametru $\vartheta \equiv -i\omega^{n+1, n+2}$):

$$\delta x^i = \vartheta x^i, \quad \delta(ds^2) = 2\vartheta ds^2. \quad (1.17)$$

c) Rotațiile $\omega^{j, n+1} = i\omega^{j, n+2}$ dau *translații* în E_n (n parametri $a^i \equiv \lambda\omega^{j, n+1} = i\lambda\omega^{j, n+2}$): $\delta x^i = a^i$.

d) Rotațiile $\omega^{j, n+1} = -i\omega^{j, n+2}$ dau *transformările conforme speciale* ale spațiului E_n (n parametri $b^j \equiv \omega^{j, n+1}/\lambda = -i\omega^{j, n+2}/\lambda$):

$$\begin{aligned} \delta x^i &= b^j (2x_j x^i - \delta_j^i x^2) \equiv 2(b_j x^j) x^i - b^i x^2, \\ \delta(ds^2) &= 4b_j x^j ds^2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Oglindirile în ξ^i dau în E_n oglindiri corespunzătoare ale coordonatelor x^i . Oglindirea în ξ^{n+1} sau ξ^{n+2} dă în E_n o *inversiune* în raport cu „sfera” $\lambda^2 - x^2 = 0$ respectiv $\lambda^2 + x^2 = 0$:

$$\begin{aligned} (a) \quad x'^i &= x^i \frac{\lambda^2}{x^2}, \quad ds'^2 = \left(\frac{\lambda^2}{x^2}\right)^2 ds^2, \\ (b) \quad x'^i &= -x^i \frac{\lambda^2}{x^2}, \quad ds'^2 = \left(\frac{\lambda^2}{x^2}\right)^2 ds^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Oglindirea simultană în ξ^{n+1} și ξ^{n+2} dă o oglindire a tuturor x^i .

Dilatările uniforme (1.17), transformările conforme speciale (1.18) și inversiunile (1.19) multiplică intervalul ds^2 cu un factor.

Dintre combinațiile remarcabile ale transformărilor simple enumerate menționăm rotațiile spațiale cu dilatare și transformările Lorentz cu dilatare :

$$\begin{aligned} x' &= \rho(x \cos \theta + y \sin \theta), & y' &= \rho(-x \sin \theta + y \cos \theta), \\ z' &= \rho z, & t' &= \rho t; \end{aligned} \quad (1.20a)$$

$$x' = \rho \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad ct' = \rho \frac{ct - vx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y' = \rho y, \quad z' = \rho z, \quad (1.20b)$$

precum și inversiunile față de o sferă oarecare.

§ 2. Reprezentările grupului conform

1°. Fie $S(\omega^{ab})$ matricea corespunzătoare transformării infinitezimale (1.11) într-o reprezentare oarecare a grupului conform propriu. Dezvoltând $S(\omega^{ab})$ în serie după puterile parametrilor infinitezimali ω^{ab} și păstrând primii termeni ai dezvoltării, avem :

$$S(\omega^{ab}) = 1 + \frac{1}{2} I_{ab} \omega^{ab}, \quad I_{ab} = -I_{ba}, \quad (2.1)$$

unde matricele I_{ab} sînt *operatorii infinitezimali* care determină complet reprezentarea grupului. Pentru a găsi acești operatori ne bazăm pe teorema după care comutatorul a doi operatori infinitezimali se exprimă liniar prin operatorii înșiși, coeficienții fiind *aceiași* pentru *toate* reprezentările grupului. Luînd spațiul E_{n+2} însuși ca spațiu al reprezentării grupului (1.11) găsim elementele matricelor I_{ab} :

$$(I_{ab})^h_i = \delta_{ai} \delta_b^h - \delta_a^h \delta_{bi} = \delta_{[a} \delta_{b]}^h, \quad (2.2)$$

de unde se obțin relațiile de comutare :

$$[I_{ab}, I_{cd}] = -\delta_{[ac} I_{bd]}, \quad (2.3)$$

valabile pentru *toate* reprezentările grupului conform ($|\dots|$ înseamnă suma după permutările *ciclice* ale indicilor respectivi). Relațiile (2.3) arată izomorfismul grupului conform al lui E_n cu grupul rotațiilor lui E_{n+2} pseudoeuclidian. Spațiul pseudoeuclidian E_{n+2} constituie spațiul reprezentării tensoriale hexadimensionale a grupului conform al spațiului E_n .

2°. Ne vom restrînge în cele ce urmează la spațiul-timp cuadridimensional relativist E_4 (pseudoeuclidian). După cum am amintit, geometria matricelor Dirac este hexadimensională, ceea ce ne permite să găsim imediat reprezentările spinoriale ale grupului conform propriu. Într-adevăr, cele 4 matrice Dirac γ_i (de ordinul IV) verificînd relațiile de anticomutativitate :

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2\delta_{ij}, \quad (2.4)$$

generează un inel de 16 matrice linear independente ($i \equiv \sqrt{-1}$):

$$1, \gamma_i, -i\gamma_i\gamma_k (j \neq k), -i\gamma_5\gamma_j, \gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \quad (2.5)$$

Lăsînd matricea unitate deoparte, putem construi cele 6 pentade de matrice anticomutative (Eddington), pe care le putem aranja într-un tablou strîmb simetric de matrice [2]:

$$(i_{ab}) \equiv \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} -i\gamma_i\gamma_k \\ (j \neq k) \end{array} & -i\gamma_i\gamma_5 & -\gamma_j \\ \hline -i\gamma_5\gamma_k & 0 & -\gamma_5 \\ \hline \gamma_k & \gamma_5 & 0 \end{array} \right), \quad i_{ab} = -i_{ba}, \quad (2.6a)$$

$$i_{a'b'} \equiv -i\gamma_{a'}\gamma_{b'} (a' \neq b'), \quad i_{bb'} \equiv \gamma_{b'}, \quad (2.6b)$$

$$\gamma_{a'}\gamma_{b'} + \gamma_{b'}\gamma_{a'} = 2\delta_{a'b'} \quad (a', b' = 1, \dots, 5). \quad (2.6c)$$

Am demonstrat în [3] o serie de relații (covariante în E_6) pe care le verifică i_{ab} și care rezultă exclusiv în virtutea relațiilor de anticomutativitate (2.4), de exemplu:

$$i_{ab}i_{cd} = \delta_{a[cd]b} + \frac{1}{2}\varepsilon_{abcdef}i^{ef} + i\delta_{|ac}i_{bd|}, \quad (2.7)$$

$$[i_{ab}, i_{cd}] = 2i\delta_{|ac}i_{bd|}, \quad (2.8)$$

unde $\varepsilon_{abcdef} = \pm 1$ este pseudotensorul unitate complet antisimetric (Levi-Civita) în E_6 .

Prin substituția $\gamma_{a'} \rightarrow -\gamma_{a'}$ în (2.6) obținem un alt sistem strîmb simetric de matrice $j_{ab} = -j_{ba}$, care verifică *aceleași* relații covariante în E_6 ca și i_{ab} , de exemplu:

$$[j_{ab}, j_{cd}] = 2i\delta_{|ac}j_{bd|}. \quad (2.8')$$

Sistemele de matrice i_{ab}, j_{ab} nu sînt echivalente, adică nu există o matrice (nesingulară) S de ordinul IV astfel încît să avem $j_{ab} = S^{-1}i_{ab}S$. Într-adevăr, condițiile

$$-\gamma_i = S^{-1}\gamma_i S \quad \text{și} \quad -\gamma_5 = S^{-1}\gamma_5 S = S^{-1}\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 S$$

sînt incompatibile.

Să notăm pentru simplificare: $i_{ab} \equiv i_{ab}^+, j_{ab} \equiv i_{ab}^-$.

Comparînd comutatorii (2.8–8') cu comutatorul operatorilor infinitezimali ai grupului conform (2.3), găsim cele două reprezentări cuadri-dimensionale spinoriale ale grupului conform propriu (v și [5, 6])

$$I_{ab} \equiv \frac{i}{2} i_{ab}^\pm, \quad S = 1 + \frac{i}{4} \omega^{ab} i_{ab}^\pm. \quad (2.9)$$

Transformările infinitezimale ale spinorilor vor fi deci

$$\delta\varphi \equiv \varphi'(x') - \varphi(x) = \frac{i}{4} \omega^{ab} i_{ab}^{\pm} \varphi(x). \quad (2.10)$$

§ 3. Transformările conforme ale spinorilor

1°. Din (2.9) obținem matricele transformărilor finite în spațiul reprezentării spinoriale :

$$\omega^{ab} \rightarrow \alpha : S = \exp \alpha I_{ab} \equiv \exp \frac{i}{2} \alpha i_{ab}^{\pm} = \begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} + i i_{ab}^{\pm} \sin \frac{\alpha}{2}, & \alpha - \text{real}, \\ \text{ch } \frac{i\alpha}{2} + i_{ab}^{\pm} \text{sh } \frac{i\alpha}{2}, & \alpha - \text{imaginar}, \end{cases} \quad (3.1)$$

care corespund transformărilor finite din E_6 :

$$\begin{aligned} \zeta'^a &= A^a_b \zeta^b, \quad \delta_{ab} A^a_c A^b_d = \delta_{cd}; \\ \zeta'^a &= \zeta^a \cos \alpha - \zeta^b \sin \alpha, \quad \zeta'^b = \zeta^a \sin \alpha + \zeta^b \cos \alpha, \quad \alpha - \text{real}, \\ \zeta'^a &= \zeta^a \text{ch } i\alpha + i \zeta^b \text{sh } i\alpha, \quad \zeta'^b = -i \zeta^a \text{sh } i\alpha + \zeta^b \text{ch } i\alpha, \quad \alpha - \text{imaginar}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Se vede că la o rotație de unghi 2π a sistemului de coordonate într-un plan oarecare (ξ^a, ξ^b), care readuce sistemul în poziția inițială (transformarea identică), spinorii își schimbă semnul ($S = -1$), în conformitate cu caracterul neunivoc (pînă la semn) al reprezentărilor spinoriale.

În virtutea semnăturii lui E_6 ($++++--$) și a alegerii noastre a coordonatelor (ξ^4, ξ^6 imaginare), complex conjugatul lui ω_{ab} se exprimă astfel :

$$\omega_{ab}^* = \varepsilon_a \varepsilon_b \omega_{ab}, \quad \{\varepsilon_a\} = \{++++--\}. \quad (3.3)$$

Complex conjugatul *covariant* al unui tensor oarecare se definește prin formula (v. de ex. [5]) :

$$T_{abc}^* \dots = \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c \dots T_{abc}^* \dots, \quad (3.3')$$

unde $T_{abc}^* \dots$ este complex conjugatul ordinar al lui $T_{abc} \dots$. Pentru fiecare indice $a, b, c, \dots$ egal cu 4 sau 6 trebuie deci schimbat semnul ($\omega_{ab}^* = \omega_{ab}$ însă $\omega_{ab}^* = \varepsilon_a \varepsilon_b \omega_{ab}$.)

Ținînd seama de regula de comutare [5] :

$$\gamma_4 i_{ab} = \varepsilon_a \varepsilon_b i_{ab} \gamma_4 \quad (3.4)$$

și considerînd matricele i_{ab} hermitice, găsim pentru adjunctul hermitic S^+ al matricei S :

$$S^+ \gamma_4 = \gamma_4 S^{-1}, \quad S^{-1} = \exp\left(-\frac{i}{2} \alpha i_{ab}^{\pm}\right) =$$

$$= \begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} - i i_{ab}^{\pm} \sin \frac{\alpha}{2}, & \alpha - \text{real}, \\ \text{ch } \frac{i\alpha}{2} - i_{ab}^{\pm} \text{sh } \frac{i\alpha}{2}, & \alpha - \text{imaginar}. \end{cases} \quad (3.5)$$

În sfîrșit, definind spinorul conjugat (sau adjunct) (după Dirac):

$$\bar{\varphi} = \varphi^* \gamma_4, \quad (3.6)$$

avem legea de transformare a spinorilor față de grupul conform:

$$\varphi'(x') = S\varphi(x), \quad \varphi'^*(x') = \varphi^*(x) S^+ \text{ sau } \bar{\varphi}'(x') = \bar{\varphi}(x) S^{-1}. \quad (3.7)$$

2°. Desprindem subgrupurile de transformări (v. și [5]):

a) rotațiile spațiale ($\omega^{\alpha\beta} \rightarrow \theta$):

$$S = \exp \frac{1}{2} \theta \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} : \begin{cases} \varphi' = \left(\cos \frac{\theta}{2} + \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \sin \frac{\theta}{2} \right) \varphi, \\ \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \sin \frac{\theta}{2} \right). \end{cases} \quad (3.8)$$

($\alpha \neq \beta$)

b) Transformările Lorentz ($\omega^{\alpha 4} \rightarrow i\theta$, $\text{th } \theta = v/c$):

$$S = \exp \frac{i}{2} \theta \gamma_{\alpha} \gamma_4 : \begin{cases} \varphi' = \left(\text{ch } \frac{\theta}{2} + i \gamma_{\alpha} \gamma_4 \text{sh } \frac{\theta}{2} \right) \varphi, \\ \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} \left(\text{ch } \frac{\theta}{2} - i \gamma_{\alpha} \gamma_4 \text{sh } \frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

sau

$$\varphi' = \frac{1 + i \gamma_{\alpha} \gamma_4 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \varphi, \quad \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} \frac{1 - i \gamma_{\alpha} \gamma_4 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.9')$$

c) Dilatările uniforme (B. F. Touschek, 1957 [7]) ($\omega^{56} \rightarrow i\vartheta$, $\text{th } \vartheta = w$) (semnele $\pm$ corespund celor 2 reprezentări):

$$S = \exp \left(\pm \frac{1}{2} \vartheta \gamma_5 \right) : \begin{cases} \varphi' = \left(\text{ch } \frac{\vartheta}{2} \pm \gamma_5 \text{sh } \frac{\vartheta}{2} \right) \varphi, \\ \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} \left(\text{ch } \frac{\vartheta}{2} \mp \gamma_5 \text{sh } \frac{\vartheta}{2} \right) \end{cases} \quad (3.10)$$

sau

$$\varphi' = \frac{1 + \gamma_5 w}{\sqrt{1 - w^2}}, \quad \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} \frac{1 - \gamma_5 w}{\sqrt{1 - w^2}}. \quad (3.10')$$

d) Translațiile ($\omega^{i5} = i \omega^{i6} \rightarrow a^i/\lambda$):

$$S = \exp \frac{1}{2\lambda} a^j \gamma_j (\gamma_5 \mp 1) : \begin{cases} \varphi' = \left(1 + \frac{1}{2\lambda} a^j \gamma_j (\gamma_5 \mp 1)\right) \varphi, \\ \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} \left(1 - \frac{1}{2\lambda} a^j \gamma_j (\gamma_5 \mp 1)\right). \end{cases} \quad (3.11)$$

e) Transformările conforme speciale ($\omega^{i5} = -i \omega^{i6} \rightarrow \lambda b^i$):

$$S = \exp \frac{\lambda}{2} b^j \gamma_j (\gamma_5 \pm 1) : \begin{cases} \varphi' = \left(1 + \frac{\lambda}{2} b^j \gamma_j (\gamma_5 \pm 1)\right) \varphi, \\ \bar{\varphi}' = \bar{\varphi} \left(1 - \frac{\lambda}{2} b^j \gamma_j (\gamma_5 \pm 1)\right). \end{cases} \quad (3.12)$$

Este important de subliniat transformarea spinorilor față de *translații* (3.11). Transformările (3.10–12) sînt importante de exemplu pentru teoria interacțiunilor cîmpurilor cuantice.

§ 4. Transformările conforme ale tensorilor Dirac — De Broglie

1°. Cu ajutorul expresiilor (3.1–2) se verifică relația

$$i'_{ab} \equiv S^{-1} i_{ab} S = A_a^c A_b^d i_{cd}, \quad (4.1)$$

care pentru transformări infinitezimale devine:

$$\delta i_{ab} \equiv i'_{ab} - i_{ab} = S^{-1} i_{ab} S - i_{ab} = \omega^c_{[a} i_{b]c}. \quad (4.1')$$

Structura lui (4.1–1') corespunde transformării unui tensor de ordinul II în E_6 .

2°. Cu ajutorul a doi spinori arbitrari φ , $\bar{\varphi}$ și a matricelor i_{ab} se construiește tensorul antisimetric $p_{ab} = -p_{ba}$ și scalarul N_0 [2]:

$$p_{ab} \equiv \bar{\varphi}^2 i_{ab}^1 \varphi^1 \equiv \bar{\varphi}^* \gamma_4^1 i_{ab}^1 \varphi^1, \quad N_0 \equiv \bar{\varphi}^2 \varphi^2 \equiv \bar{\varphi}^* \gamma_4^1 \varphi^1, \quad (4.2)$$

care unifică în E_6 covarianții biliniari a două cîmpuri spinoriale arbitrare.

În cazul $\varphi \equiv \varphi^2$ componentele lui p_{ab} au următoarea semnificație în teoria lui Dirac a electronului (v. de ex. [2, 3]):

p_{ij} — densitatea momentului magnetoelectric (tensor antisimetric în E_4),

- $i p_{6j}$ — densitatea curentului electric (vector în E_4),
 $- p_{5j}$ — densitatea de spin (pseudovector în E_4),
 $i p_{65}$ — densitatea pseudoscalară, N_0 — densitatea scalară.

În cazul $\varphi \neq \varphi$, cu anumite restricții suplimentare, p_{ab} capătă în teoria fuziunii semnificația cîmpurilor mezonice (v. de ex. [2, 3, 8]):

- $p_{ij} \equiv H_{ij}$ — cîmpul mezonic vectorial (fotoni „grei”),
 $i p_{6j} \equiv V_j$ — potențialul mezonic vectorial,
 $- p_{5j} \equiv U_j$ — cîmpul mezonic pseudoscalar,
 $i p_{65} \equiv M_0$ și N_0 — potențialele mezonice, pseudoscalar și scalar;

$$(p_{ab}) \equiv \left(\begin{array}{c|c|c} H_{jk} & U_j & iV_j \\ \hline -U_k & 0 & iM_0 \\ \hline -iV_k & -iM_0 & 0 \end{array} \right). \quad (4.3)$$

Din considerațiile de mai jos este indicată interpretarea fizică a cîmpurilor:

$$B_j \equiv p_{5j} - i p_{6j} \equiv -U_j - V_j; \quad C_j \equiv p_{5j} + i p_{6j} \equiv -U_j + V_j. \quad (4.4)$$

Se pot construi doi tensori $p_{ab}^{\pm}$ corespunzător celor două reprezentări spinoriale. Acești tensori verifică identitățile fundamentale (consecințe ale regulilor de comutare (2.4)):

$$a) p_{ac} p^{bc} = N_0 \delta_a^b, \quad (b) N_0 p^{ab} = \frac{1}{8} \varepsilon^{abcdef} p_{cd} p_{ef}. \quad (4.5)$$

Prima identitate (4.5a) a fost dată în [2]. A doua identitate (4.5b) am stabilit-o în [3], unde am dat deducerea covariantă a acestor identități și am demonstrat echivalența lor.

3°. Legea de transformare a lui p_{ab} și N_0 față de grupul conform rezultă din legea de transformare a spinorilor (3.7) și din (4.1–1'):

$$p'_{ab} \equiv \overset{2}{\bar{\varphi}'} i_{ab} \overset{1}{\varphi'} = \overset{2}{\bar{\varphi}} S^{-1} i_{ab} \overset{1}{S} \varphi = A_a^c A_b^d p_{cd}, \quad (4.6)$$

$$N'_0 \equiv \overset{2}{\bar{\varphi}'} \overset{1}{\varphi'} = \overset{2}{\bar{\varphi}} S^{-1} \overset{1}{S} \varphi = N_0, \quad (4.6')$$

adică exact legea de transformare a unui tensor, respectiv scalar, în E_6 .

În cazul transformărilor conforme infinitesimale avem:

$$\delta p_{ab} = \omega^c_{[a} p_{b]c} \equiv -\frac{1}{2} \delta_{[ac} p_{bd]} \omega^{cd}; \quad \delta N_0 = 0. \quad (4.7)$$

Desprindem de aici legile de transformare:

a) Față de rotațiile spațiale și spațio-temporale (grupul Lorentz omogen propriu), H_{ik} , U_i , V_i , M_0 sînt tensori în E_4 (N_0 este un scalar conform).

b) Față de dilatări infinitezimale ϑ :

$$\begin{aligned} \delta H_{ik} &= 0, \quad \delta U_i = -\vartheta V_i, \quad \delta V_i = -\vartheta U_i, \quad \delta M_0 = 0; \\ \delta B_i &= -\vartheta B_i, \quad \delta C_i = \vartheta C_i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

c) Față de translații infinitezimale a^k :

$$\begin{aligned} \delta H_{ik} &= \frac{1}{\lambda} a_{[i} B_{k]}, \quad \delta M_0 = \frac{1}{\lambda} a^k B_k, \\ \delta U_i &= -\delta V_i = \frac{1}{\lambda} a^k (H_{ki} - M_0 \delta_{ki}) = -\frac{1}{2} \delta C_i, \quad \delta B_i = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

d) Față de transformări conforme speciale b^k :

$$\begin{aligned} \delta H_{ik} &= \lambda b_{[i} C_{k]}, \quad \delta M_0 = -\lambda b^k C_k, \\ \delta U_i &= \delta V_i = \lambda b^k (H_{ki} + M_0 \delta_{ki}) = -\frac{1}{2} \delta B_i, \quad \delta C_i = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

În timp ce grupul Lorentz nu „amestecă” câmpurile mezonice (H_{ik} , B_i , C_i , M_0) între ele, grupul dilatărilor afectează numai câmpurile B_i , C_i (analog transformărilor de fază), iar grupul *translațiilor* și al transformărilor conforme speciale „amestecă” câmpurile mezonice între ele. Acest rezultat este deosebit de important în teoria forțelor nucleare, în reducerea numărului constantelor de cuplaj. De exemplu, interacția cuadrifermionică, invariantă la translații, descrie cu succes interacțiile slabe.

Prin combinarea ambelor reprezentări spinoriale cuadrspinoriale se pot construi tensori de rang impar. Astfel în cazul unui vector, față de grupul Lorentz (omogen propriu) A_i , A_5 , A_6 sau A_i , $B = A_5 - i A_6$, $C = A_5 + i A_6$ sînt tensori. Față de dilatări :

$$\delta A_i = 0, \quad \delta B = -\vartheta B, \quad \delta C = \vartheta C; \quad (4.11)$$

față de translații :

$$\delta A_i = \frac{1}{\lambda} a_i B, \quad \delta B = 0, \quad \delta C = -\frac{2}{\lambda} a^i A_i; \quad (4.12)$$

față de transformările conforme speciale :

$$\delta A_i = \lambda b_i C, \quad \delta B = -2\lambda b^i A_i, \quad \delta C = 0. \quad (4.13)$$

În virtutea lui (2.7) un tensor de ordinul IV (sau de orice ordin superior par) se exprimă prin N_0 și p_{ab} .

§ 5. Operatorii momentelor

1°. Am găsit în (2.9) operatorii momentelor în cazul celor două reprezentări cuadridimensionale spinoriale :

$$M_{ab}^{(s)} \equiv -I_{ab} = \frac{1}{2} i_{ab}^{\pm}, \quad (5.1)$$

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i \delta_{[ac} M_{bd]}. \quad (5.2)$$

Despicînd, obținem (semnele $\pm$ se referă la cele două reprezentări) :

a) Operatorul momentului cinetic (cuadridimensional) (grupul Lorentz omogen) :

$$M_{ik}^{(s)} = -\frac{i}{4} (\gamma_i \gamma_k - \gamma_k \gamma_i); \quad (5.3a)$$

b) operatorul grupului dilatărilor :

$$i M_{55}^{(s)} \equiv D^{(s)} = \pm \frac{i}{2} \gamma_5; \quad (5.3b)$$

c) operatorul impuls-energie (grupul translațiilor) :

$$M_{5i}^{(s)} - i M_{6i}^{(s)} \equiv P_i^{(s)} = \frac{i}{2} \gamma_i (\gamma_5 \mp 1); \quad (5.3c)$$

d) operatorul grupului conform special :

$$M_{5i}^{(s)} + i M_{6i}^{(s)} \equiv K_i^{(s)} = \frac{i}{2} \gamma_i (\gamma_5 \pm 1). \quad (5.3d)$$

Indicele (s) indică faptul că reprezentările sînt *finit*-dimensionale (spinoriale), deci operatorii $M_{ab}^{(s)}$ sînt *matrice* acționînd asupra indicelui funcției de undă (spinorului) și nu asupra argumentului său x^i .

2°. Trecînd la reprezentările *infinit*-dimensionale în spațiul funcțiilor avem în coordonatele ξ^a :

$$\begin{aligned} f(\xi + \delta \xi) - f(\xi) &= \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \delta \xi^a = \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \omega^a_b \xi^b \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} \left(\xi_a \frac{\partial}{\partial \xi^b} - \xi_b \frac{\partial}{\partial \xi^a} \right) f \omega^{ba} \equiv \frac{i}{2} \hat{M}_{ab} f \omega^{ba}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\hat{M}_{ab} \equiv -i \left(\xi_a \frac{\partial}{\partial \xi^b} - \xi_b \frac{\partial}{\partial \xi^a} \right). \quad (5.5)$$

Operatorii $\hat{M}_{ab}$ sînt operatori diferențiali acționînd asupra argumentului funcției de undă. Putem scrie (5.4) dezvoltat astfel :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \hat{M}_{ab} \omega^{ba} \equiv & i \left[\frac{1}{2} \hat{M}_{jk} \omega^{kj} + \hat{M}_{65} \omega^{56} + \frac{1}{2} (\hat{M}_{5j} - i \hat{M}_{6j}) (\omega^{j5} + i \omega^{j6}) + \right. \\ & + \frac{1}{2} (\hat{M}_{5j} + i \hat{M}_{6j}) (\omega^{j5} - i \omega^{j6}) \Big] \equiv i \left[\frac{1}{2} \hat{M}_{jk} \omega^{kj} + i \hat{M}_{65} \vartheta + \frac{1}{\lambda} (\hat{M}_{5j} - i \hat{M}_{6j}) a^j + \right. \\ & \left. + \lambda (\hat{M}_{5j} + i \hat{M}_{6j}) b^j \right]. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, în coordonatele $x (\partial_i \equiv \partial/\partial x^i)$, folosind (1.13 a), (1.15 a), avem :

$$\begin{aligned} f(x + \delta x) - f(x) = \partial_i f \delta x^i = \partial_i f \Big[\omega^{ij} x_j - i \omega^{56} x^i + \frac{\lambda}{2} (\omega^{i5} + i \omega^{i6}) - \\ - \frac{1}{2\lambda} (\omega^{5j} - i \omega^{6j}) (2x_j x^i - \delta_j^i x^2) \Big] \equiv \partial_i f [\omega^{ij} x_j + \vartheta x^i + a^i + \\ + b^i (2x_j x^i - \delta_j^i x^2)] \equiv i \left[\frac{1}{2} \hat{M}_{jk} \omega^{kj} + \hat{D} \vartheta + \hat{P}_k a^k + \hat{K}_j b^j \right] f, \end{aligned}$$

de unde rezultă :

a) operatorul momentului cinetic :

$$\hat{M}_{ik} \equiv -i x_{[i} \partial_{k]} \equiv x_{[i} \hat{P}_{k]}; \quad (5.5a)$$

b) operatorul grupului dilatărilor :

$$i \hat{M}_{65} \equiv \hat{D} \equiv -i x^k \partial_k \equiv x^k \hat{P}_k; \quad (5.5b)$$

acest operator poate fi numit și „operatorul fazei” dacă ne amintim de expresia fazei unei plane monocromatice $x^k p_k$;

c) operatorul impuls-energie ;

$$\hat{M}_{5k} - i \hat{M}_{6k} \equiv \lambda \hat{P}_k \equiv -i \lambda \partial_k; \quad (5.5c)$$

d) operatorul grupului conform special ;

$$\begin{aligned} \hat{M}_{5k} + i \hat{M}_{6k} & \equiv \frac{1}{\lambda} \hat{K}_k \equiv -\frac{i}{\lambda} (2x_k x^j \partial_j - x^2 \partial_k) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{\lambda} (2x_k \hat{D} - x^2 \hat{P}_k); \quad x^i \hat{K}_i \equiv x^2 \hat{D}. \end{aligned} \quad (5.5d)$$

Operatorul impuls-energie este fundamental, toți ceilalți operatori sînt combinații covariante construite din $\hat{P}_k$ și x^i . Operatorii (5.5) verifică

desigur aceleași relații de comutare (5.2) care sînt independente de reprezentare. Prin „despicarea” acestora în E_4 se obțin comutatorii operatorilor (5.5a—d).

§ 6. Formalismul lagrangean și variabilele dinamice

1°. Fie $\delta_0 f$ variația infinitezimală a *formei* funcției f (variație „locală” într-un același punct spațio-temporal) :

$$\delta_0 f \equiv f'(x) - f(x). \quad (6.1)$$

Atunci variația „totală” δf a funcției f , datorită transformării infinitezimale de coordonate va fi :

$$\begin{aligned} \delta f &\equiv f'(x') - f(x) = \delta_0 f + \partial_k f \delta x^k = \delta_0 f + \frac{\partial f}{\partial \xi^a} \delta \xi^a \equiv \\ &\equiv \delta_0 f - \frac{i}{2} \hat{M}_{ab} f \omega^{ab}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

de unde

$$\delta_0 f = \frac{i}{2} \hat{M}_{ab} f \omega^{ab} + \delta f. \quad (6.3)$$

În particular pentru cîmpul spinorial φ și cîmpul p_{ab} , avem folosind (2.10) și (4.7) :

$$\delta_0 \varphi = \frac{i}{2} \omega^{ab} \left(\hat{M}_{ab} + \frac{1}{2} i_{ab} \right) \varphi \equiv \frac{i}{2} \omega^{ab} (\hat{M}_{ab} + M_{ab}^{(s)}), \quad (6.4)$$

$$\delta_0 p_{ab} = \frac{i}{2} \omega^{cd} (\hat{M}_{cd} p_{ab} + i \delta_{[ac} p_{b]d}). \quad (6.5)$$

În cazul unui vector din E_6 :

$$\begin{aligned} \delta A_a &= \omega_a{}^b A_b = \frac{1}{2} \omega^{bc} (I_{bc})_a{}^d A_d = \frac{1}{2} \omega^{bc} \delta_{a[b} \delta_{c]}^d A_d, \\ \delta_0 A_a &= \frac{i}{2} \omega^{bc} (\hat{M}_{bc} \delta_a^d - i \delta_{a[b} \delta_{c]}^d) A_d. \end{aligned} \quad (6.6)$$

2°. Fie L lagrangeanul depinzînd de funcția de undă $\psi = \{\psi_f\}$ ($f=1,2,\dots,s$, s — numărul componentelor funcției de undă) și de derivatele ei de ordinul întîi $\psi_{f,k} = \partial_k \psi_f$. Condiția de extremum pentru acțiune ne conduce la ecuațiile Euler-Lagrange, care reprezintă ecuațiile cîmpului :

$$\frac{\delta A}{\delta \psi_f} \equiv \frac{\partial L}{\partial \psi_f} - \partial_k \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} = 0. \quad (6.7)$$

Condiția de invarianță a acțiunii la un anumit grup de transformări de coordonate (în cazul nostru grupul conform al spațiului-timp) ne dă :

$$0 = \delta A = \delta \int L dx = \int (\delta L + \partial_k \delta x^k) dx = \int (\delta_0 L + \partial_k (L \delta x^k)) dx.$$

Ținînd seama de (6.7) avem

$$\begin{aligned} \delta_0 L &= \frac{\partial L}{\partial \psi_f} \delta_0 \psi_f + \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} \delta_0 \psi_{f,k} = \\ &= \partial_k \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} \delta_0 \psi_f + \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} \partial_k \delta_0 \psi_f = \partial_k \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} \delta_0 \psi_f \right), \end{aligned}$$

prin urmare

$$0 = \delta A = \int dx \partial_k \left\{ \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} \delta_0 \psi_f + L \delta x^k \right\}. \quad (6.8)$$

Aici $\delta_0 \psi$, conform lui (6.3), se scrie :

$$\begin{aligned} \delta_0 \psi &= \delta \psi + \frac{i}{2} \omega^{ab} \hat{M}_{ab} \psi = \frac{1}{2} \omega^{ab} I_{ab} \psi + \frac{i}{2} \omega^{ab} \hat{M}_{ab} \psi \equiv \\ &\equiv \frac{i}{2} \omega^{ab} (M_{ab}^{(s)} + \hat{M}_{ab}) \psi, \end{aligned} \quad (6.9)$$

unde matricele $I_{ab} \equiv iM_{ab}^{(s)}$ sînt operatorii infinitesimale ai grupului în reprezentarea finit-dimensională realizată în spațiul funcțiilor de undă $\psi = \{\psi_f\}$ (funcțiile de undă se transformă după o reprezentare a grupului fundamental al teoriei).

În cazul grupului conform, δx^k este dat de (1.13 a) sau (1.15 a)

$$\delta x^k = \frac{1}{2} X_{ab}^k \omega^{ab}, \quad (6.10)$$

$$X_{ij}^k = \delta_{[i}^k x_{j]}, \quad X_{65}^k = i x^k, \quad (6.10')$$

$$X_{5j}^k - i X_{6j}^k = -\lambda \delta_j^k, \quad X_{5j}^k + i X_{6j}^k = -\frac{1}{\lambda} (2x_j x^k - \delta_j^k x^2).$$

Introducînd în (6.8) obținem tensorul densității „momentului cinetic” :

$$\begin{aligned} \Theta_{ab}^k &\equiv \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} (i \hat{M}_{ab} + I_{ab}) \psi + L X_{ab}^k \equiv \\ &\equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} (\hat{M}_{ab} + M_{ab}^{(s)}) \psi + L X_{ab}^k \equiv M_{ab}^k + S_{ab}^k, \end{aligned} \quad (6.11a)$$

unde M_{ab}^k este partea „orbitală” sau „externă” a densității „momentului cinetic” :

$$M_{ab}^k \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \hat{M}_{ab} \psi + L X_{ab}^k, \quad (6.11b)$$

iar S_{ab}^k este partea „proprie” sau „internă” a densității „momentului cinetic” :

$$S_{ab}^k \equiv \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} I_{ab} \psi \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} M_{ab}^{(s)}. \quad (6.11c)$$

Tensorul (6.11a) verifică ecuația de conservare :

$$\partial_k \Theta_{ab}^k = 0. \quad (6.12)$$

De aici se obține prin procedeul cunoscut conservarea tensorului „moment cinetic” :

$$M_{ab} \equiv -i \int M_{ab}^4 dV \equiv \int M_{ab}^0 dV = \text{const}, \quad (6.13)$$

unde $-i M_{ab}^4 \equiv M_{ab}^0$ este densitatea spațială a „momentului cinetic”.

3°. Din (6.11) desprindem tensorii care corespund diferitelor sub-grupuri :

a) Grupul translațiilor (tensorul densității energie-impuls) :

$$(a) \Theta_{ij}^k - i \Theta_{6j}^k \equiv \lambda T_j^k + T_j^{(s)k},$$

$$(b) T_j^k \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \hat{P}_j \psi - L \delta_j^k \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} \hat{P}_j \psi_f - L \delta_j^k, \quad (6.14)$$

$$(c) T_j^{(s)k} \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} P_j^{(s)} \psi \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} (P_j^{(s)})_f^h \psi_h.$$

T_j^k este tensorul energie-impuls clasic, care se obține punând $\delta\psi \equiv \psi'(x') - \psi(x) = 0$ față de grupul translațiilor. Este remarcabil faptul că în teoria conformă, pe lângă tensorul energie-impuls T_j^k („extern” sau „orbital”), mai apare tensorul $T_j^{(s)k}$ („intern” sau „propriu”) care se consideră nul în teoria clasică unde matricele care reprezintă grupul translațiilor se pun egale cu unitatea ($S=1$), deci $P_j^{(s)} = 0$.

b) Grupul Lorentz omogen (tensorul densității momentului cinetic) :

$$(a) \Theta_{ij}^k \equiv M_{ij}^k + S_{ij}^k,$$

$$\begin{aligned} (b) M_{ij}^k &\equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \hat{M}_{ij} \psi + L \delta_{[i}^k x_{j]} \equiv \\ &\equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} x_{[i} \hat{P}_{j]} \psi - x_{[i} \delta_{j]}^k L \equiv x_{[i} T_{j]}^k, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$(c) S_{ij}^k \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} M_{ij}^{(s)} \psi \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} (M_{ij}^{(s)})_f^h \psi_h,$$

unde M_{ij}^k este momentul cinetic orbital, iar S_{ij}^k — spinul.

c) Grupul dilatărilor uniforme :

$$\begin{aligned} (a) \quad i \Theta_{65}^k &\equiv D^k + D^{(s)k}, \\ (b) \quad D^k &\equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \hat{\mathbf{D}} \psi - x^k L \equiv x^j T_j^k, \\ (c) \quad D^{(s)k} &\equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \mathbf{D}^{(s)} \psi = i \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} (D^{(s)})_f^h \psi_h, \end{aligned} \quad (6.16)$$

unde D^k constituie partea „orbitală” („externă”), iar $D^{(s)k}$ partea „proprie” („internă”).

d) Grupul transformărilor conforme speciale :

$$\begin{aligned} (a) \quad \Theta_{5j}^k + i \Theta_{6j}^k &\equiv \frac{1}{\lambda} K_j^k + K_j^{(s)k}, \\ (b) \quad K_j^k &\equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \hat{\mathbf{K}}_j \psi - (2x^k x_j - \delta_j^k x^2) L \equiv \\ &\equiv (2x_j x^i - \delta_j^i x^2) T_i^k \equiv 2x_j D^k - x^2 T_j^k, \\ (b') \quad x^i K_i^k &\equiv x^2 D^k, \\ (c) \quad K_j^{(s)k} &\equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{,k}} \mathbf{K}_j^{(s)} \psi \equiv i \frac{\partial L}{\partial \psi_{f,k}} (K_j^{(s)})_f^h \psi_h. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Avem și aici o parte orbitală și o parte proprie.

Tensorul densității energie-impuls T_i^k este fundamental, toți ceilalți tensori (părțile orbitale) se obțin prin combinații covariante ale acestuia cu coordonatele x^i .

Partea „orbitală” („externă”) a variabilelor dinamice este dată de operatorii infinitezimali ai grupului în reprezentarea infinit-dimensională (în spațiul funcțiilor), acești operatori acționind asupra argumentelor (x) ale funcției de undă; partea orbitală există pentru orice câmp. Partea „proprie” („internă”) a variabilelor dinamice este dată de operatorii infinitezimali ai grupului în reprezentarea finit-dimensională, acești operatori acționind asupra indicilor funcției de undă. Pentru o funcție de undă scalară în raport cu grupul considerat (reprezentări unidimensionale), partea proprie este evident egală cu zero.

Aplicînd (6.13) găsim conservarea celor 15 mărimi, corespunzătoare celor 15 parametri ai grupului conform.

4°. Să presupunem că funcția de undă ψ se transformă după reprezentarea vectorială hexadimensională a grupului conform, adică ψ este un vector A_a în E_6 . Atunci după (6.6)

$$(M_{ab}^{(c)})_f^h \equiv -i \delta_{f|a} \delta_{b|}^h \quad (6.18)$$

și partea proprie („internă”) va fi :

$$S_{ab}^k \equiv \frac{\partial L}{\partial A_{,k}^a} A_b - \frac{\partial L}{\partial A_{,k}^b} A_a \quad (6.19)$$

care se despică ușor în E_4 . De exemplu partea proprie a tensorului energie-impuls va fi :

$$T_j^{(s)k} \equiv 2 \frac{\partial L}{\partial C_{,k}} A_j - \frac{\partial L}{\partial A_{,k}^j} B, \quad (6.20)$$

unde am notat (v. mai înainte) $B = A_5 - iA_6$ și $C = A_5 + iA_6$.

În cazul unui câmp spinorial φ (care se transformă după una din cele două reprezentări cuadridimensionale spinoriale ale grupului conform) partea proprie (internă) va fi după (5.1) :

$$S_{ab}^k \equiv \frac{i}{2} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,k}} i_{ab}^\pm \varphi + \text{complex conjugat}, \quad (6.21)$$

care deasemenea se despică imediat în E_4 . De exemplu partea proprie a tensorului energie-impuls va fi :

$$T_j^{(s)k} \equiv -\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{,k}} \gamma_j (\gamma_5 \pm 1) \varphi + \text{complex conjugat}. \quad (6.22)$$

§ 7. Grupul translațiilor și ecuațiile de câmp

1°. Variația infinitezimală a *forme*i funcției de câmp (variația „locală”) se exprimă după (6.3) aditiv cu ajutorul operatorilor infinitezimali ai grupului (deci a momentelor respective) în reprezentările infinit- și finit-dimensionale :

$$\delta_0 \psi = \frac{i}{2} \omega^{ab} (\hat{M}_{ab} + M_{ab}^{(s)}) \psi, \quad (7.1)$$

unde $\hat{M}_{ab}$ este operatorul diferențial, iar $M_{ab}^{(s)}$ operatorul-matrice, ai momentului cinetic.

Să presupunem că *forma funcției de câmp nu se schimbă la translații, adică variația locală este nulă* : $\delta_0 \psi = 0$. Această condiție este în fond legată de un anumit principiu variațional și de anumite ecuații de câmp.

În acest caz obținem după (7.1) :

$$(\lambda \hat{P}_j + P_j^{(s)}) \psi = 0. \quad (7.2)$$

În cazul câmpului spinorial rezultă :

$$\partial_j \varphi - \frac{1}{2\lambda} \gamma_j (\gamma_5 \mp 1) \varphi = 0, \quad (7.3)$$

de unde

$$\begin{aligned} (a) \quad \gamma^j \partial_j \varphi - \frac{2}{\lambda} (\gamma_5 \mp 1) \varphi &= 0, \\ (b) \quad \partial_j \bar{\varphi} \gamma^j - \frac{2}{\lambda} \bar{\varphi} (\gamma_5 \pm 1) &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Aceste ecuații diferă de ecuația Dirac prin termenul conținând γ_5 . (O ecuație de acest tip a fost relevată de K. Nikolski, 1933). Aplicînd lui (7.4a) operatorul „adjunct” $\gamma^k \partial_k - \frac{2}{\lambda} (\gamma_5 \pm 1)$, rezultă ecuația lui D'Alembert pentru particule cu masă de repaus nulă :

$$\left[\gamma^j \partial_j - \frac{2}{\lambda} (\gamma_5 \pm 1) \right] \left[\gamma^k \partial_k - \frac{2}{\lambda} (\gamma_5 \mp 1) \right] = \square \equiv \delta^{jk} \partial_j \partial_k. \quad (7.5)$$

2°. În cazul cîmpului p_{ab} construit mai înainte (4.2), avem :

$$\delta_0 p_{ab} = \frac{1}{2} \omega^{cd} (i \hat{M}_{cd} p_{ab} - \delta_{[ac} p_{bd]}), \quad (7.6)$$

de unde condiția de invarianță $\delta_0 p_{ab} = 0$ față de grupul translațiilor, dă :

$$\begin{aligned} (a) \quad \lambda \partial_j H_{ik} &= \delta_{j[i} B_{k]}, & (b) \quad \lambda \partial_j B_k &= 0, \\ (c) \quad \lambda \partial_j C_k &= 2 (H_{kj} + \delta_{kj} M_0), & (d) \quad \lambda \partial_j M_0 &= B_j. \end{aligned} \quad (7.7)$$

De aici se obțin consecințele :

$$\begin{aligned} (a) \quad \partial_{[j} H_{ik]} &= 0, & (b) \quad \partial_j H^{jk} &= 3B^k/\lambda = 3\partial^k M_0, \\ (c) \quad H_{ik} &= \frac{\lambda}{4} \partial_{[ik} C_{j]}, & (d) \quad \delta_{ik} M_0 &= \frac{\lambda}{4} \partial_{[ik} C_{j]}, \\ (e) \quad M_0 &= \frac{\lambda}{8} \partial_j C^j. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Se vede asemănarea cu ecuațiile lui Maxwell : (7.8c) arată că H_{ik} este un rotor, derivînd din potențialul C_i , de unde și primul sistem maxwellian (7.8a); (7.8) este de tipul celui de al doilea sistem maxwellian, B_k jucînd rolul curentului (care derivă aici din M_0). Dacă $M_0 = 0$, se obțin ecuațiile lui Maxwell în vid, (7.8e) dă condiția de etalonare Lorentz a potențialelor.

Prin urmare ecuațiile lui Maxwell se obțin drept consecințe ale anulării variației „locale” (ale invarianței forme) a funcțiilor p_{ab} în raport cu grupul translațiilor ; ecuațiile lui Maxwell sînt deci legate de legile de conservare a energiei și impulsului.

3°. În cazul unui cîmp vectorial A_a (în E_6), aceeași condiție dă ecuațiile :

$$(a) \quad \lambda \partial_i A_k = \delta_{ik} B, \quad (b) \quad \partial_i B = 0, \quad (c) \quad \lambda \partial_i C = -2A_i \quad (7.9)$$

cu consecințele

$$(a) A_i = -\frac{\lambda}{2} \partial_i C, \quad (b) \square A_i = 0, \quad (c) \partial_i A^i = 4B/\lambda, \quad (7.10)$$

adică A_i derivă din potențialul C și verifică ecuația D'Alembert. Prin urmare și acest tip de ecuații sînt legate de grupul translațiilor (omogenitatea) spațiului-timp.

Alte probleme legate de grupul conform (construcția izospinorilor și a izotensorilor, conjugarea de sarcină și altele) vor fi examinate în altă parte [9], [10].

Primit la 8. IV. 1964

BIBLIOGRAFIE

- [1] G. Vrănceanu: Geometrie analitică, proiectivă și diferențială, București, 1961, pag. 270; Lecții de geometrie diferențială, vol. II, București, 1951, pag. 106.
- [2] A. Popovici: Rev. Math. pur. et appl., v. IV, nr. 4 (1959), p. 577; v. V, nr. 2 (1960), p. 411; Bull. Math. R.P.R. v. 3, nr. 1 (1959) p. 93; Comunic. Acad. R.P.R. v. VIII, nr. 9 (1958), p. 877; v. IX, nr. 7 (1959), p. 671.
- [3] A. P. Hristev: Lucrările Consfătuirii Internaționale de Geometrie și Topologie, Iași 1958, p. 203; Comunic. Acad. R.P.R. v. XI, nr. 7, p. 755, p. 761; Bull. Math. R.P.R. v. 4, nr. 1—2 (1961), p. 23.
- [4] A. Popovici, A. P. Hristev, I. Popovici: Comptes Rendus Acad. Paris, v. 257, nr. 21 (1963), p. 3120.
- [5] A. P. Hristev: Rev. Roum. Math. pur. et appl., v. IX, nr. 7, p. 619; Stud. Cercet. Mat., v. XVI, nr. 7 (1964), p. 849.
- [6] R. L. Ingraham: Nuovo Cimento, v. 12 (1954), p. 825; H. A. Kastrup, Ann. d. Phys., v. 9, nr. 7—8 (1962), p. 388.
- [7] B. F. Touschek: Nuovo Cimento, v. 5 (1957), p. 1281.
- [8] L. de Broglie: Théorie générale des particules à spin, 2^e éd., Paris 1954.
- [9] A. P. Hristev: Rev. Roum. Math. pur. et appl., v. X, nr. 3 (1965), p. 297; Stud. Cercet. Mat., v. 17, nr. 1 (1965), p. 95.
- [10] A. P. Hristev: Analele Univ. București, seria mat., nr. 1 (1965) (sub tipar).

К КОНФОРМНОЙ КОВАРИАНТНОСТИ

Краткое содержание

Используя ковариантные (в E_6) свойства [3] объединенных матриц Дирака, определяются два спинорных 4-мерных представления собственной конформной группы, инфинитезимальные преобразования которой имеют выражения (1.13—15). Приводятся законы преобразования спиноров (3.1), (3.8—12) и объединенных в E_6 тензоров Дирака — Де Бройля (4.7—10). Операторы „моментов” (энергии-импульса, момента количества движения и т.д.) объединяются в псевдоевклидовом $E_6 (+ + - + - + -)$ (5.3), (5.5); аналогично объединяются соответствующие динамические переменные (6.11), (6.14—17). Все динамические переменные имеют „орбитальную” (или „внешнюю”) часть (6.11 b) и „собственную” (или „внутреннюю”) часть (6.11c); так например, тензор энергии-импульса: (6.20), (6.22). Наконец, выявляется связь между группой перемещений и определенными уравнениями поля, например, уравнениями Максвелла (нулевая „локальная” вариация функций поля).

SUR LA COVARIANCE CONFORME

Résumé

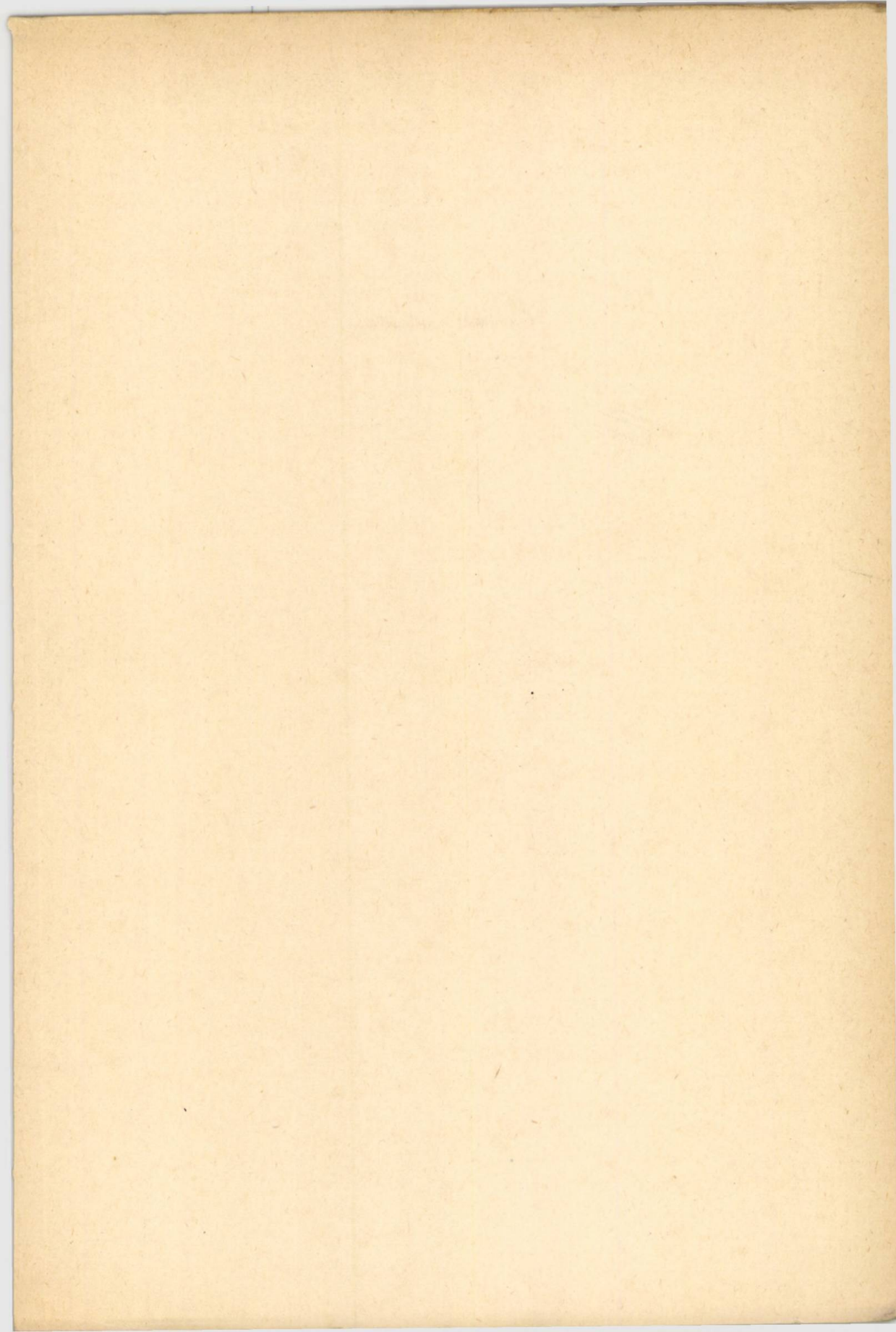
A l'aide des propriétés covariantes (dans E_6) [3] des matrices de Dirac unifiées, on retrouve les deux représentations 4-dimensionnelles spinorielles du groupe conforme propre, dont les transformations infinitésimales ont l'expression (1.13–15). On donne les lois de transformation des spineurs (3.1), (3.8–12) et des tenseurs de Dirac-De Broglie (4.7–10) unifiés dans E_6 . Les opérateurs des „moments” (énergie-impulsion, moment cinétique etc.) s'unifient dans E_6 pseudo-euclidien (+ + + - + -) (5.3), (5.5); de même s'unifient les variables dynamiques correspondantes (6.11), (6.14–17). Toutes les variables dynamiques ont une partie „orbitale” (ou „externe”) (6.11b) et une partie „propre” (ou „interne”) (6.11c); par exemple, le tenseur énergie-impulsion : (6.20), (6.22). Enfin, on relève une liaison entre le groupe des translations et certaines équations de champ, par exemple les équations de Maxwell (variation „locale” nulle des fonctions de champ).



Redactor: ȘTEFANIA BARBU

Tehnoredactor: MIHAIL GEORGESCU

Analele Universității București
Seria ȘTIINȚELE NATURII
MATEMATICĂ – MECANICĂ
ANUL XIII – Nr. 1 – 1964



F 1914

L. 031996

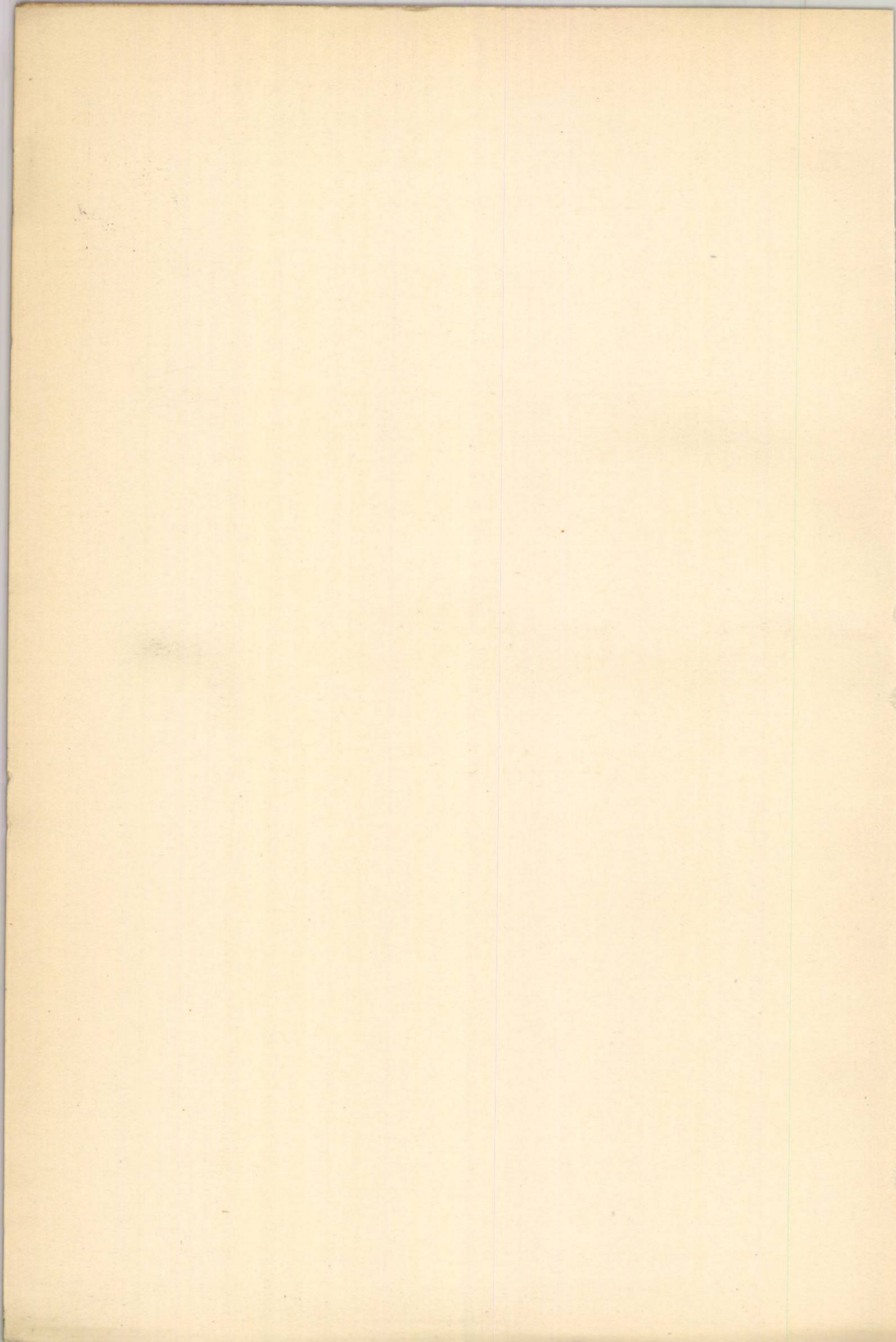
KAT

ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI

SERIA
ȘTIINȚELE NATURII

MATEMATICĂ-MECANICĂ

ANUL XIII — nr. 2/1964



ANALELE UNIVERSITĂȚII BUCUREȘTI



SERIA ȘTIINȚELE NATURII MATEMATICĂ — MECANICĂ

ANUL XIII — Nr. 2/1964

SERIA ȘTIINȚELE NATURII

COLEGIUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil : Acad. prof. *M. Filipescu*.

Membri : Acad. prof. *H. Hulubei* ; acad. prof. *M. Nicolescu* ; prof. dr. *P. Spacu*,
membru corespondent al Academiei R.P.R. ; prof. dr. *N. Botnariuc*.

Secretar : Conf. *Gh. Ciucu*, candidat în științe ; conf. *D. Negoiu*, candidat în
științe.

MATEMATICĂ — MECANICĂ

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil : Acad. prof. *M. Nicolescu*.

Membri : Acad. prof. *C. Iacob* ; acad. prof. *Gh. Mihoc* ; acad. prof. *N. V. Theodorescu* ;
acad. prof. *Gh. Vrănceanu* ; prof. dr. *Gh. Galbură* ; Conf. *C. Andreian*,
candidat în științe ; conf. *Gh. Ciucu*, candidat în științe.

Secretar : conf. *P. P. Teodorescu*, candidat în științe.

REDACȚIA
UNIVERSITATEA BUCUREȘTI

B-dul 6 Martie nr. 64

Telefon 16.01.87/09

S U M A R

M. MALIȚA și R. THEODORESCU: Modele matematice pentru negocieri	9
G. CIUCU: Un model de venituri în grup	21
N. ȘANDRU: Asupra acțiunii unor sarcini concentrate în interiorul planului elastic cu neomogeneitate discontinuă	25
CONSTANTIN DRĂMBĂ: Aplicații ale teoriei punctelor singulare de tipul nod generalizat la determinarea condițiilor de închidere pentru curbe plane și pentru suprafețe	37
APOSTOL CONSTANTIN: Teoremă de existență și unicitate pentru ecuații cu diferențiale în spații local convexe	45
CABIRIA ANDREIAN CAZACU: Clase de acoperiri riemanniene	55
EUGEN CÂMPU: Ecuații Fredholm de prima speță cu integrale Stieltjes Lebesgue	77
D. FIRESCU și G. THEILER: O problemă de statistică matematică cu aplicație în producție	99
STELIAN TURBATU: Aripa rectangulară în mișcarea transonică nestaționară	111
N. IOSIPESCU: Confirmări experimentale și generalizări ale principiului lui Saint Venant	123
TIBERIU POSTELNICU: Unele aplicații ale topologiei în biologie	137
G. SIREȚCHI: Asupra unor spații cu bază	141
T. HUIDU: Studiul fotoelastic al stării de tensiune din jurul unor lucrări subterane	145
DEMAYO-TURTOI ADRIANA: Algebre diedrice generale	153

ST. MARK

1	THE ST. MARK
2	THE ST. MARK
3	THE ST. MARK
4	THE ST. MARK
5	THE ST. MARK
6	THE ST. MARK
7	THE ST. MARK
8	THE ST. MARK
9	THE ST. MARK
10	THE ST. MARK
11	THE ST. MARK
12	THE ST. MARK
13	THE ST. MARK
14	THE ST. MARK
15	THE ST. MARK
16	THE ST. MARK
17	THE ST. MARK
18	THE ST. MARK
19	THE ST. MARK
20	THE ST. MARK
21	THE ST. MARK
22	THE ST. MARK
23	THE ST. MARK
24	THE ST. MARK
25	THE ST. MARK
26	THE ST. MARK
27	THE ST. MARK
28	THE ST. MARK
29	THE ST. MARK
30	THE ST. MARK
31	THE ST. MARK
32	THE ST. MARK
33	THE ST. MARK
34	THE ST. MARK
35	THE ST. MARK
36	THE ST. MARK
37	THE ST. MARK
38	THE ST. MARK
39	THE ST. MARK
40	THE ST. MARK
41	THE ST. MARK
42	THE ST. MARK
43	THE ST. MARK
44	THE ST. MARK
45	THE ST. MARK
46	THE ST. MARK
47	THE ST. MARK
48	THE ST. MARK
49	THE ST. MARK
50	THE ST. MARK
51	THE ST. MARK
52	THE ST. MARK
53	THE ST. MARK
54	THE ST. MARK
55	THE ST. MARK
56	THE ST. MARK
57	THE ST. MARK
58	THE ST. MARK
59	THE ST. MARK
60	THE ST. MARK
61	THE ST. MARK
62	THE ST. MARK
63	THE ST. MARK
64	THE ST. MARK
65	THE ST. MARK
66	THE ST. MARK
67	THE ST. MARK
68	THE ST. MARK
69	THE ST. MARK
70	THE ST. MARK
71	THE ST. MARK
72	THE ST. MARK
73	THE ST. MARK
74	THE ST. MARK
75	THE ST. MARK
76	THE ST. MARK
77	THE ST. MARK
78	THE ST. MARK
79	THE ST. MARK
80	THE ST. MARK
81	THE ST. MARK
82	THE ST. MARK
83	THE ST. MARK
84	THE ST. MARK
85	THE ST. MARK
86	THE ST. MARK
87	THE ST. MARK
88	THE ST. MARK
89	THE ST. MARK
90	THE ST. MARK
91	THE ST. MARK
92	THE ST. MARK
93	THE ST. MARK
94	THE ST. MARK
95	THE ST. MARK
96	THE ST. MARK
97	THE ST. MARK
98	THE ST. MARK
99	THE ST. MARK
100	THE ST. MARK

СОДЕРЖАНИЕ

М. МАЛИЦА и Р. ТЕОДОРЕСКУ: Математические модели для переговоров	19
Г. ЧЮКУ: Модель групповых приходов	23
Н. ШАНДРУ: О действии сосредоточенных нагрузок внутри упругой плоскости с разрывной неоднородностью	36
КОНСТАНТИН ДРЫМБЭ: Применение теории особых точек типа обоб- щенного узла при определении условий замыкания для плоских кри- вых и для поверхности	43
АПОСТОЛ КОНСТАНТИН: Теорема о существовании и единственности для уравнений с дифференциалами в локально-выпуклых прост- ранствах	53
КАБИРИА АНДРЕИАН КАЗАКУ: Классы римановых накрывающих. I. .	73
ЕУЖЕН КЫМПУ: Уравнения Фредгольма первого рода с интегралами Лебега Стильтьеса	97
Д. ФИРЕСКУ и Г. ТАЙЛЕР: Вопрос по математической статистике с её применением в производстве	109
СТЕЛИАН ТУРБАТУ: Прямоугольное крыло в нестационарном около- звуковом движении	121
Н. ИОСИПЕСКУ: Обобщения и экспериментальные подтверждения за- кона Сен Венана	136
ТИБЕРИУ ПОСТЕЛНИКУ: Некоторые приложения топологии в биологии	140
Г. СИРЕЦКИ: О некотором пространстве с базисом	144
Т. ХУИДУ: Фотоупругое изучение напряжённого состояния вокруг не- которых подземных выработок	151
ДЕМАИО-ТУРТОИ АДРИАНА: Общие диэдрические алгебры	165

SOMMAIRE

M. MALIȚA și R. THEODORESCU : Mathematical models for negotiations	
G. CIUCU : Un modèle entrées en groupe	19
N. ȘANDRU : Données concernant l'action de charges concentrées à l'intérieur du plan élastique avec heterogénéité discontinue	23
CONSTANTIN DRĂMBA : Applications de la théorie des points singuliers du type noeud généralisé à la détermination des conditions pour que certains courbes et surfaces soient fermées	36
APOSTOL CONSTANTIN : A Theorem of Existence and Unicity for Equ- tion with Differentials in locally convex spaces	53
CABIRIA ANDREIAN CAZACU : Classes de recouvrements riemanniens I	74
EUGEN CÂMPU : Equations Fredholm de première espèce avec intégrales Stieltjes Lebesgue	98
D. FIRESCU și G. THEILLER : Une problème de statistique mathématique avec application dans la production	110
STELIAN TURBATU : Rectangular wing in tronsonic non-stationary	121
N. IOSIPESCU : Confirmations experimentales et généralisations du principe de Saint-Venant	136
TIBERIU POSTELNICU : Quelques applications biologiques de la topologie	140
G. SIREȚCHI : Sur quelque espace à bas	144
T. HUIDU : L'étude photoélastique des contraintes autour des constructions souterraines	151
DEMAIO-TURTOI-ADRIANA : Algebre diedrice generale	165

MODELE MATEMATICE PENTRU NEGOCIERI

M. MALIȚA și R. THEODORESCU

Problema modelării fenomenelor sociale a preocupat mulți oameni de știință. Ne limităm să amintim aici opera de pionerat pe care un fost profesor al Universității din București a realizat-o în această direcție. Este vorba de lucrarea *Mécanique sociale* (1910) a lui Spiru Haret, primul român și unul dintre primii cercetători din lume care a subliniat importanța modelului pentru științele sociale. Deși acest model constă din aplicarea mecanicii raționale la științe sociale este criticabil, el nu este mai puțin bazat pe ideea modelării matematice a fenomenelor sociale cu scopul de a analiza și de a clarifica conceptele de bază care intervin în astfel de probleme.

Dezvoltarea științei zilelor noastre au impus delimitarea cu precizie a unor domenii ale matematicii cu largi posibilități de aplicație în modelarea diferitelor fenomene. Dintre aceste domenii, teoria jocurilor (strategice) s-a manifestat foarte puternic în ultimul timp mai ales datorită multiplelor sale aplicații.

Literatura consacrată teoriei jocurilor (strategice) este foarte bogată, dată fiind importanța teoretică și aplicativă a acestei discipline. Spre deosebire de majoritatea teoriilor matematice care nu ajung să fie cunoscute de nespecialiști și care nu constituie o preocupare pentru un public larg, teoria jocurilor se bucură de un deosebit interes și anume tocmai pe planul aplicațiilor în economie și în activitatea diplomatică. În acest sens este semnificativ faptul că prima carte consacrată teoriei jocurilor *Theory of games and economic behaviour*, apărută în 1944, este scrisă de matematicianul John von Neumann în colaborare cu economistul Oskar Morgenstern.

În ultimul timp se constată apariția unui număr mereu crescând de lucrări care caută să folosească teoria jocurilor la problema negocierilor; se impune deci prin importanța problemelor pe care le abordează un nou cîmp deosebit de fertil pentru cercetare, care ar putea fi numit cu suficientă justificare «diplomație matematică». Caracteristica lor comună a acestor lucrări este aceea de a arăta că, în general modelele furnizate de

² Comunicare prezentată în cadrul Sesiunii științifice organizate în cinstea Centenarului Universității din București.

teoria jocurilor fără sumă nulă cu mai mulți parteneri corespund cel mai bine unor astfel de probleme. Dar studiul jocurilor fără sumă nulă cu mai mulți parteneri este tocmai acea parte din teoria jocurilor care este cea mai puțin studiată datorită complexității și dificultății problemelor care apar. Această situație crează însă o permanentă emulație între dezvoltarea studiului acestor jocuri și posibilitatea aplicării lor în practica problemelor internaționale.

În cele ce urmează ne propunem să prezentăm pe scurt acest nou și deosebit de important domeniu de aplicații al teoriei jocurilor și apoi să descriem, din punct de vedere matematic, un model care apare la negocieri și care se bazează în mod esențial pe egalitatea partenerilor și pe tratative pașnice, în opoziție cu majoritatea modelelor existente în literatură care nu sînt axate pe acest principiu și care au de cele mai multe ori ca limită conflictul. De asemenea, prezentăm un model pentru dezarmare, care extinde modelul lui Eugene Singer ¹.

1. Problemele atît de complexe puse de activitatea diplomatică necesită pentru studiu utilizarea unor modele simplificate. Astfel, se cunosc modele politice, modele simulatorii, modele matematice. Prin conținutul lor însă ele se pretează în majoritatea cazurilor unei tratări cu ajutorul modelelor furnizate de puternicul instrument al teoriei jocurilor strategice. Deși aplicarea teoriei jocurilor este astăzi foarte utilizată în acest domeniu, nu puține sînt criticile — mai mult sau mai puțin justificate — care se aduc pătrunderii teoriei jocurilor în științele sociale.

Teoria jocurilor dispune de numeroase modele. Modelul jocului cu doi parteneri cu sumă nulă este cel mai complet tratat din punct de vedere matematic, însă prezintă dezavantajul că nu poate fi aplicat la prea multe cazuri reale, deoarece presupune că cei doi parteneri au interese total opuse. Cu alte cuvinte, ceea ce cîștigă primul jucător, trebuie să piardă în mod necesar al doilea jucător. Ca exemplu, să luăm cazul tipic de conflict în problemele internaționale; în această situație proprietatea ca sumă cîștigului să fie nulă este, evident, neverificată. Rezultă de aici să în jocuri în care partenerii nu au interese complet contrarii cum se întîmplă în cazul amintit al unui conflict internațional, conduce în mod natural la un model care face să intervină jocurile fără sumă nulă. De altfel, modelele descrise pînă acum în literatura de specialitate sînt, aproape fără excepție, furnizate de astfel de jocuri cu mai mulți parteneri, în particular cele privind tratativele și negocierile.

Trebuie să admitem însă că orice problemă internațională poate fi sistematic analizată și că îi putem pune în corespondență un joc. Desigur, complexitatea unei probleme internaționale ne obligă la unele schematizări sau la unele simplificări, fără de care modelarea matematică devine imposibilă. Așa se explică practicarea așa numitor jocuri politice; este vorba despre un procedeu de studiere a problemelor internaționale cu ajutorul unui model furnizat de un joc imaginar.

¹ Eugene Singer, *A bargaining model for disarmament negotiations*. The Journal of Conflict Resolution, 1963, 7, 21—25.

Jocurile politice au fost practicate încă de Germania în probleme de politică externă în perioada premergătoare celui de al doilea război mondial. De asemenea, Japonia practica astfel de jocuri politice la analiza situației din zona Pacificului. Jocurile politice de tip nou sugerează procedee care evită simplificările schematice ale situației internaționale considerate și care încearcă să simuleze cât mai fidel posibil această situație. Guvernul fiecărei țări interesate este reprezentat, de exemplu, de către un jucător sau de către un grup de jucători. În plus, apare un jucător suplimentar «natura», reprezentat de către o persoană sau o echipă de referenți; rolul acestui jucător este să facă față unor evenimente neprevăzute care au loc în lumea reală și care nu sînt sub controlul nici unui guvern, cum ar fi: unele noi descoperiri tehnice, moartea unor mari personalități, foame, revolte, neadoptarea de hotărîri pripite în ajunul alegerilor etc.

Jucătorii care iau parte la un astfel de joc politic trebuie să fie în mod necesar experți în probleme privind zonele sau țările pe care le reprezintă. Acești jucători acționează așa cum ar acționa în situația internațională examinată guvernele sau părțile interesate. «Natura» are sarcina să urmărească fiecare mutare, în sensul ca să nu permită, de exemplu, o mutare care ar ieși din cadrul constituțional sau al «puterii» guvernului pe care o propune.

Să vedem acum prin ce se caracterizează jocurile politice. Este vorba mai întîi de posibilitatea de creare a unor grupări vremelnice, adică a coalițiilor, în funcție de interesele care se pun în joc la tratative sau negocieri. Așa de exemplu, conferința celor 18 state pentru dezarmare, ar putea fi modelată, într-o primă aproximație, cu ajutorul unui joc fără sumă nulă cu 3 parteneri: grupul țărilor socialiste, grupul țărilor capitaliste și grupul țărilor neangajate.

În problema negocierilor și a tratativelor un rol important îl au promisiunile și amenințările. Desigur, definiția exactă a promisiunii în opoziție cu cea a amenințării nu este evidentă. Diferența constă în aceea că o promisiune este costisitoare cînd reușește, iar o amenințare este costisitoare cînd nu reușește. O amenințare care a reușit este aceea care nu se pune în practică. Aceste noțiuni, care în realitate sînt deosebit de complexe și cu multiple implicații sînt foarte bine ilustrate în probleme privind atacul prin surprindere și dezarmarea, stocarea armelor nucleare, războiul regional, etc.

Problema dezarmării și deci implicit problema prevenirii unui atac prin surprindere este foarte dificil de modelat cu ajutorul teoriei jocurilor, cu toate că această teorie este în fapt singura care poate «prinde» din punct de vedere matematic toate aspectele unei astfel de situații complexe. În fapt, această problemă se reduce la un joc în care partenerii nu au încredere unul în celălalt. Prin urmare, posibilitatea de a măsura gradul de «încredere» este dificilă, și prin aceasta și crearea modelului corespunzător. Introducerea unei astfel de măsuri depinde de foarte mulți factori care nu au aceeași pondere în felul în care pot influența gradul de «încredere».

2. Să presupunem că se duc negocieri între doi parteneri sau între două grupări de parteneri. Primul partener sau jucător dispune, să spunem

de un număr s de propoziții elementare, nedecompozabile, $a_1, \dots, a_s$. De asemenea, jucătorul al doilea dispune la rîndul său de un număr t de propoziții elementare, nedecompozabile, $b_1, \dots, b_t$. Aceste propoziții elementare sînt fie condiționale (de exemplu, considerațiile cuprinse în preambulul unui tratat sau condițiile necitate într-un act de vînzare, dar care fac obiectul tratativelor), fie operande (de exemplu, angajamente precise în cadrul unui tratat), care le vom bara în cele ce urmează. Evident, unele din propozițiile $a_1, \dots, a_s$ pot coincide ca formulare cu unele din propozițiile $b_1, \dots, b_t$; ceea ce le distinge este tocmai importanța pe care le-o acordă partenerii respectivi.

Să vedem acum ce înțelegem printr-o strategie pură. Pentru aceasta să notăm respectiv cu $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ două submulțimi¹ ale familiilor părților corespunzătoare mulțimilor $(a_1, \dots, a_s)$ și $(b_1, \dots, b_t)$. Să admitem că elementele lui $\mathcal{A}$ sînt $A_1, \dots, A_m$, iar elementele lui $\mathcal{B}$ sînt $B_1, \dots, B_n$. Vom lua în cele ce urmează ca mulțimi de strategii ale celor doi jucători respectiv mulțimile $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$; vom presupune, evident, că aceste mulțimi sînt cunoscute de către cei doi jucători ceea ce revine din punct de vedere al celor ce iau parte la negocieri la cunoașterea propozițiilor elementare ale părților interesate, fapt posibil dacă ținem seamă de faptul că la negocieri participă întotdeauna experți care cunosc în mod temeinic problemele care urmează să fie discutate, pe de o parte, iar pe de altă parte putem presupune că numerele s și t sînt suficient de mari pentru a putea cuprinde toate variantele posibile. Prin urmare, o pereche de strategii (A_j, B_k) este de forma

$$a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_q} b_{k_1} b_{k_2} \dots b_{k_r},$$

unde unele propoziții elementare sînt eventual barate, adică sînt operande; de exemplu, s-au întreprins acțiunile efective $\bar{a}_{j_q}, \bar{b}_{k_r}$ (dispozitiv) în condițiile $a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_{q-1}} b_{k_1} b_{k_2} \dots b_{k_{r-1}}$ (declarație sau preambul). Pot exista și perechi pur declarative, fără acțiuni concrete imediate, adică perechi care conțin numai prepoziții nebarate; de exemplu, putem cita majoritatea comunicatelor comune care sînt rezultatul unor tratative. De asemenea, o pereche poate fi operandă pentru una din părți și declarativă pentru cealaltă; este vorba deci de o acțiune contra promisiuni.

Pentru a putea scrie matricea jocului, este necesar să atribuim valori perechilor de strategii (A_j, B_k) , $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq n$. Să vedem acum cum putem atribui aceste valori. Desigur, un diplomat care urmează să ia parte la negocieri, în urma unei analize profunde, își stabilește o ordine de preferință privind diversele cupluri de strategii. Cu alte cuvinte, diplomatul își fixează un sistem de valori care într-un anumit fel măsoară gradul mediu de utilitate sau acceptabilitate a perechii de strategii considerate. Trebuie să observăm că cei doi parteneri vor atribui perechii (A_j, B_k) valori în general diferite dat fiind că gradul de acceptabilitate

¹ Evident, putem lua drept $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ respectiv mulțimile tuturor părților formate cu propozițiile elementare corespunzătoare, în măsura în care toate aceste părți au sens din punct de vedere al negocierilor.

pentru ei ar putea să nu fie același. Rezultă de aici că fiecare partener dispune de o matrice de accesibilități care este în general necunoscută celuilalt partener, dar asupra căreia se poate avea o informație parțială, aproximativă, suficient de bună, deoarece în cursul mutărilor jucătorii își dezvăluie indirect prin strategia aleasă unele indicații privind tabelele proprii de accesibilități.

Din punct de vedere al teoriei jocurilor, să admitem deci că cei doi parteneri P_1 și P_2 dispun, respectiv, de următoarele tabele de accesibilități :

A \ B	B				
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
		λ_{01}	λ_{02}	$\dots$	λ_{0n}
A_1	λ_{10}	λ_{11}	λ_{12}	$\dots$	λ_{1n}
A_2	λ_{20}	λ_{21}	λ_{22}	$\dots$	λ_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	λ_{m0}	λ_{m1}	λ_{m2}	$\dots$	λ_{mn}

A \ B	B				
	B_1	B_2	$\dots$	B_n	
		μ_{01}	μ_{02}	$\dots$	μ_{0n}
A_1	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}	$\dots$	μ_{1n}
A_2	μ_{20}	μ_{21}	μ_{22}	$\dots$	μ_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	μ_{m0}	μ_{m1}	μ_{m2}	$\dots$	μ_{mn}

unde, evident,

$$\lambda_{jk} = u_1(A_j, B_k), \quad \mu_{jk} = u_2(A_j, B_k), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n;$$

aici u_1 și u_2 sînt cele două funcții de acceptibilitate (sau utilitate) ale celor doi parteneri. La aceste tabele am adăugat și acceptibilitățile, să le numim absolute, pe care le atribuie cei doi parteneri în mod necondiționat diverselor strategii, adică

$$\begin{aligned} \lambda_{j0} &= u'_1(A_j), \quad 1 \leq j \leq m, & \lambda_{0k} &= u'_1(B_k), \quad 1 \leq k \leq n, \\ \mu_{j0} &= u'_2(A_j), \quad 1 \leq j \leq m, & \mu_{0k} &= u'_2(B_k), \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Desigur, trebuie să distingem cazul în care cei doi parteneri cunosc fiecare funcțiile de acceptibilitate ale celuilalt și cazul în care cei doi parteneri nu cunosc fiecare funcțiile de accesibilitate ale celuilalt, fiind conștienți de acest lucru.

Desigur, se poate spune că în decursul unor negocieri de lungă durată tabelele de accesibilități se modifică. Pentru aceasta este necesar, într-o primă aproximație, să putem diviza negocierile în faze în care să presupunem că tabelele de accesibilități nu variază.

Să vedem acum cum am putea asocia o valoare, o accebitate, perechii (A_j, B_k) . Pentru aceasta, să ne situăm în cazul cel mai general cînd cei doi parteneri nu cunosc fiecare funcțiile de acceptabilitate ale celuilalt.

Este natural să admitem că mulțimii de propoziții elementare $a_1, \dots, a_s$ jucătorul P_1 îi poate asocia un sistem de ponderi, să spunem $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \alpha_j > 0^1$, $1 \leq j \leq s$, $\sum_{j=1}^s \alpha_j = 1$; de asemenea, să presupunem că jucătorul P_1 poate atribui ponderi propozițiilor elementare ale adversarului său P_2 , să spunem $\beta'_1, \dots, \beta'_t$. Pe de altă parte, jucătorul P_2 atribuie propozițiilor sale elementare ponderile $\beta_1, \dots, \beta'_t$ și ponderile $\alpha'_1, \dots, \alpha'_s$ propozițiilor elementare ale adversarului său P_1 . Evident, ponderile atribuite de jucător propozițiilor sale elementare nu coincid, în general, cu ponderile pe care le atribuie adversarul aceluiași propoziții. Fiind dată acum mulțimile de strategii $\mathcal{A}$ și $\mathcal{B}$ să presupunem că cu ajutorul ponderilor introduse mai sus, putem atașa fiecărei strategii A_j , $1 \leq j \leq m$, și fiecărei strategii B_k , $1 \leq k \leq n$, câte alte două șiruri de ponderi, să spunem $\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma'_1, \dots, \gamma'_m, \delta_1, \dots, \delta_n, \delta'_1, \dots, \delta'_n$. Atunci fiind dată o pereche de strategii (A_j, B_k) să presupunem că

$$\lambda_{jk} = f_1(\gamma_j, \delta'_k), \quad \mu_{jk} = f_2(\gamma'_j, \delta_k), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n,$$

unde funcțiile f_1 și f_2 sînt alese în mod convenabil în raport de situația analizată; de exemplu, am putea lua

$$\lambda_{jk} = \frac{\gamma_j}{\delta'_k}, \quad \mu_{jk} = \frac{\delta_k}{\gamma'_j}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 < k \leq n.$$

Prin urmare, dacă fiecare dintre cei doi parteneri ar cunoaște funcțiile de acceptabilitate ale celuilalt, înseamnă că putem lua

$$\mu_{jk} = f_1(\gamma_j, \delta_k), \quad \mu_{jk} = f_2(\gamma_j, \delta_k), \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n.$$

În acest caz este normal să căutăm o soluție a negocierilor printre perechile (A_j, B_k) pentru care

$$[\lambda_{jk} - \lambda_{j_0 k}] [\mu_{jk} - \mu_{j_0 k_0}] = \text{maxim},$$

unde (A_{j_0}, B_{k_0}) este o pereche de strategii dintre cele mai dezavantajoase, iar

$$\lambda_{jk} \geq \lambda_{j_0 k_0}, \quad \mu_{jk} \geq \mu_{j_0 k_0};$$

evident, aici putem vorbi despre un extrem local relativ la perechea (A_{j_0}, B_{k_0}) .

Dacă ne situăm în al doilea caz, desigur că putem să cerem să maximizăm aceeași expresie, numai că de data aceasta apar valori estimate

¹ Ipoteza $\alpha_j > 0$, $1 \leq j \leq s$, revine din punct de vedere practic la aceea că propoziția α_j , $1 \leq j \leq s$, poate fi utilizată în decursul tratativelor.

pe baza unei analize premergătoare negocierilor; rezultă de aici că este normal, în fapt, să ne dăm nu estimațiile coresponzătoare, ci mai curînd funcțiile comune de repartitie — să le spunem subiective — ale ponderilor coresponzătoare.

3. Să considerăm acum un model de negociere în problema dezarmării, sugerat de E. Singer. Plecînd de la observația că o astfel de problemă este influențată de o multitudine de factori care fac să apară numeroase strategii care nu se pot stăpîni sau prescrie cu ușurință și la care trebuie să adăugăm numeroasele tipuri de arme care fac obiectul tratativelor, E. Singer propune modelul denumit «împarte și alege» la negocierile privind dezarmarea generală sau parțială.

Este vorba despre următorul model. Să considerăm două țări P_1 și P_2 (sau două coaliții de țări), care vor fi desemnați în cele ce urmează prin «parteneri» sau «jucători». Unul dintre parteneri dispune de dreptul să plaseze toate tipurile de arme ale celor două țări în două grupe distincte. Fiecare grupă conține unele tipuri de arme care urmează să fie păstrate iar altele care urmează să fie distruse. Celălalt partener are atunci posibilitatea să determine soluția finală de dezarmare prin alegerea uneia dintre cele două grupe de arme.

Pentru simplificare, să presupunem că cele două țări P_1 și P_2 negociază stocurile privind n tipuri de arme x_j , $1 \leq j \leq n$. Să notăm atunci cu A_{ij} stocul de arme de tipul x_j detinut de țara P_i ; în cele ce urmează, pentru ușurarea scrierii vom lua $n = 3$.

Să precizăm acum regulile jocului. Să presupunem că țara P_1 are dreptul să dispună cele $2n = 6$ stocuri de arme ($A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}$) în două grupe, să spunem (A_{11}, A_{23}) și ($A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}$); avem de-a face aici cu o mutare liberă. Țara P_2 are dreptul să aleagă sau grupa I sau grupa II; după alegere, grupa rămasă revine de drept țării P_1 ; este vorba deci tot de o mutare liberă.

Să admitem că țara P_2 alege grupa I, adică (A_{11}, A_{23}). Este vorba aici nu de faptul că țara P_2 își însușește stocul A_{11} care aparține țării P_1 , ci este vorba de faptul că țara P_1 , trebuie să distrugă stocul A_{11} rămînînd cu stocurile A_{12}, A_{13} , iar țara P_2 rămîne numai cu stocul A_{23} , distrugînd stocurile A_{21}, A_{22} . Trebuie subliniat aici că părțile A_{11}, A_{21} sau A_{12}, A_{22} sau A_{13}, A_{23} nu trebuie să fie egale în număr în sensul că numărul de arme de tipul x_1 aparținînd țării P_1 , adică A_{11} , nu trebuie să fie egal în mod necesar cu numărul de arme de tipul x_1 aparținînd țării P_2 , adică A_{21} ; rezultă deci că fiecare țară dispune de anumite criterii care permit estimarea calitativă și cantitativă a armelor considerate, în sensul că după această alegere una dintre cele două țări să nu fie dezavantajată; din punct de vedere al teoriei jocurilor este vorba aici de introducerea unui sistem de valori care în cele din urmă conduce la scrierea matricii jocului.

Din descrierea de mai sus, rezultă că sîntem în prezența unui joc cu informație completă. Strategiile de care dispune țara (jucătorul) P_1 sînt toate modalitățile posibile în care poate împărți cele $2n = 6$ stocuri de arme în condițiile expuse mai sus; un calcul simplu ne arată că acest număr de strategii este egal cu 45, număr care, evident, coincide cu numărul de strategii de care dispune țara (jucătorul) P_2 . Este vorba deci de

un joc în care cei doi parteneri pot efectua numai mutări libere, partida încheindu-se cu o soluție în problema dezarmării.

Din descrierea făcută, rezultă că țara (jucătorul), P_1 dispune de un avantaj care îi revine din dreptul de a împărți în două grupe armele supuse discuției. În ipoteza că țara P_1 , să spunem, are dreptul să împartă armele în două grupe, ea poate priva țara P_2 de a dispune simultan de arme de tipurile x_1 și x_2 , de exemplu, plasând A_{21} în grupa I și A_{22} în grupa II .

Pentru a elimina această lipsă, să complicăm puțin regulile jocului obținând un model în 4 etape: (1) stocurile de arme aparținând ambelor țări sînt dispuse într-o anumită ordine de fiecare țară, în așa fel încît acele arme pe care au interes să le mențină sau să facă pe adversar să le distrugă să figureze în capul listei; (2) fiecare țară face cunoscut celeilalte părți lista de arme; (3) un cifru secret împarte totalul stocurilor de arme în două grupe, determinînd totodată care țară are dreptul să aleagă prima; (4) orice avantaj care ar rezulta din calitatea de a împărți sau de a alege trebuie eliminată. Evident, noile reguli ne conduc la un joc cu informație parțială:

$$\begin{array}{cc}
 \text{țara } P_1 & \text{țara } P_2 \\
 I_{12}^1 \left\{ \begin{array}{l} 1. A_{22} \\ \textcircled{2} A_{13} \end{array} \right\} I_{21}^1 & I_{21}^2 \left\{ \begin{array}{l} 1. A_{11} \\ 2. A_{13} \end{array} \right\} I_{12}^2 \\
 II_{12}^1 \left\{ \begin{array}{l} 3. A_{21} \\ 4. A_{11} \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} 3. A_{21} \\ \textcircled{4} A_{22} \end{array} \right\} II_{12}^2 \\
 \left\{ \begin{array}{l} 5. A_{12} \\ 6. A_{23} \end{array} \right\} II_{21}^1 & II_{21}^2 \left\{ \begin{array}{l} 5. A_{13} \\ 6. A_{12} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Rezultă deci că fiecare țară (jucător) a executat o mutare liberă. Mai departe, după ce fiecare țară a luat cunoștință de lista celeilalte țări, să presupunem că trimite unui « arbitru » un plic închis care conține un număr cuprins între 1 și 6; este vorba deci de o nouă mutare liberă. Acest număr-cheie corespunde la numerele de pe listele de arme și are o importanță hotărîtoare în sensul că delimitează precis cele două grupe de arme pentru fiecare țară în parte. În plus, acest număr, după o regulă prestabilită, decide care țară are dreptul să împartă în două grupe armele celor două țări. Evident, cea mai simplă regulă este ca țara care alege numărul mai mic (sau mai mare) să dispună de împărțirea amintită. În caz că ambele țări aleg aceeași cheie, un mecanism aleator decide țara căreia îi revine rolul de a împărți armele; prin urmare, la acest pas poate surveni o mutare aleatoare.

Să analizăm mai întîi primul caz cînd cheia mai mică determină țara cu dreptul de a împărți în grupe armele. Să presupunem că ar fi P_1 țara care și-a ales cheia mai mică, fie ea 2, iar țara P_2 — cheia 4 (marcate în listele amintite mai sus). Prin urmare, țara P_2 poate să-și aleagă una dintre grupele specificate în schema de mai sus. Rezultă de aici că

dacă țara P_2 alege grupa I_{12}^2 , atunci în acest model extins, țării P_1 îi revin acele arme care urmează după grupa I_{12}^2 în lista țării P_2 , adică grupa II_{12}^2 . Prin urmare, în acest fel se ajunge la o soluție a problemei dezarmării. Evident, cazul în care cheia mai mare stabilește țara cu dreptul de a împărți tipurile de arme este tratat analog.

Cazul când cheia mai mare stabilește țara care are dreptul să împartă armele conduce, evident, la un avantaj pentru țara care alege, cum de altfel rezultă din exemplul examinat. În acest caz, țara P_1 este gata să primească primele două stocuri de arme A_{22}, A_{13} de pe lista sa, însă deoarece ea are cheia mai mică decât cea a țării P_2 (egală cu 4) are dreptul să primească în plus încă două stocuri de arme, adică primește în total $A_{22}, A_{13}, A_{21}, A_{12}$; rezultă de aici că țara P_1 își creează un avantaj. Conform regulii (4), orice avantaj trebuie eliminat, așa că în cazul exemplului examinat toate stocurile de arme existând între cele două chei, adică A_{21} și A_{12} este logic să fie supuse unei tehnici simple «împarte și alege».

Această eliminare a avantajului are loc, evident în cazul când țara care alege își fixează atenția asupra unei grupe de pe lista sa. În caz contrar, alegând grupa de pe lista celeilalte țări, avantajul dispăre și prin aceasta și eliminarea sa.

Să căutăm să extindem mai departe acest model complicând și mai mult regulile jocului. Astfel, să considerăm un model în mai multe etape: (1) stocurile de arme aparținând ambelor țări sînt dispuse într-o anumită ordine de fiecare țară, în așa fel încît acele arme pe care au interes să le mențină sau să facă pe adversar să le distrugă să figureze în capul listei; (2) fiecare țară face cunoscut celeilalte părți lista de arme; (3) un cifru secret împarte totalul stocurilor de arme în două grupe, determinînd totodată care țară are dreptul să aleagă prima; (4) dacă această țară nu vrea să aleagă o grupă de arme, atunci alege (împreună cu cealaltă țară, dacă acceptă) un nou cifru secret care împarte cele două grupe existente de arme în 2 grupe noi fixînd prin urmare totodată țara care să aleagă prima ș.a.m.d., dacă la un anumit moment grupele nu pot să mai fie împărțite deoarece noile subgrupe care ar rezulta nu conțin arme ale ambelor țări, atunci țara respectivă este obligată să aleagă numărul de grupe corespunzătoare care îi revin conform numărului de mutări efectuate; (5) orice avantaj ar rezulta din calitatea de a împărți sau de a alege trebuie eliminată. Ca și la modelul precedent sîntem în prezența unui joc cu informație parțială.

Să reluăm un exemplu analog cu cel de mai sus și să presupunem că țara care are dreptul să împartă armele este dată de exemplu, de cheia cea mai mică. Să luăm $n = 6$, pentru simplitate, și să alcătuim listele de arme ale celor două țări, marcînd și cifrul pe aceste liste; avem ¹

¹ Aici am folosit notația I_{1212}^2 , de exemplu, pentru a arăta că este vorba de prima grupă a țării P_2 , în care a împărțit prima oară țara P_1 , țara P_2 nu a vrut să aleagă, a împărțit din nou țara P_1 și, în sfîrșit, a ales țara P_2 .

$$\begin{array}{c}
 \text{țara } P_1 \\
 \left. \begin{array}{l} I_{12}^1 \left\{ \begin{array}{l} I_{1212}^1 \left\{ \begin{array}{l} 1. A_{22} \\ \boxed{2} A_{13} \end{array} \right\} I_{2121}^1 \\ II_{1212}^1 \left\{ \begin{array}{l} 3. A_{14} \\ \boxed{4} A_{21} \end{array} \right\} \\ III_{1212}^1 \left\{ \begin{array}{l} 5. A_{11} \\ \boxed{6} A_{24} \end{array} \right\} II_{2121}^1 \\ IV_{1212}^1 \left\{ \begin{array}{l} 7. A_{16} \\ 8. A_{25} \end{array} \right\} III_{2121}^1 \\ V_{1212}^1 \left\{ \begin{array}{l} 9. A_{26} \\ 10. A_{12} \end{array} \right\} IV_{2121}^1 \\ VI_{1212}^1 \left\{ \begin{array}{l} 11. A_{23} \\ 12. A_{15} \end{array} \right\} V_{2121}^1 \end{array} \right\} \\
 II_{12}^1
 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{țara } P_2 \\
 \left. \begin{array}{l} I_{21}^2 \left\{ \begin{array}{l} I_{2121}^2 \left\{ \begin{array}{l} 1. A_{12} \\ 2. A_{21} \end{array} \right\} I_{1212}^2 \\ \boxed{3} A_{22} \\ 4. A_{13} \end{array} \right\} II_{1212}^2 \\ II_{2121}^2 \left\{ \begin{array}{l} 5. A_{14} \\ 6. A_{24} \end{array} \right\} III_{1212}^2 \\ \begin{array}{l} 7. A_{25} \\ \boxed{8} A_{16} \end{array} \\ III_{2121}^2 \left\{ \begin{array}{l} 9. A_{11} \\ \boxed{10} A_{23} \end{array} \right\} IV_{1212}^2 \\ IV_{2121}^2 \left\{ \begin{array}{l} 11. A_{25} \\ 12. A_{15} \end{array} \right\} V_{1212}^2 \end{array} \right\} \\
 II_{12}^2
 \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Am admis deci că țara P_1 , alegându-și cheia 4, are dreptul să facă împărțirea dorită. Rezultă atunci că țara P_2 — cu cheia 8 — poate să-și aleagă una dintre cele două grupe specificate în schema de mai sus sau să procedeze la o nouă împărțire. Vom admite deci că țara P_2 nu vrea să aleagă una dintre cele două grupe și hotărăște să treacă la o nouă împărțire, alegându-și cheia (3, 8, 10). În acest caz, să presupunem că țara P_1 își alege la rândul ei cheia (2, 4, 6). Să vedem acum după ce regulă stabilim cărei țări îi revine rolul de a împărți armele; putem adopta, de exemplu, următoarea regulă simplă: țara căreia îi revine dreptul de a împărți armele este decisă de media aritmetică a numerelor care alcătuiesc cheia, de exemplu, este decisă de media cea mai mică; dacă ambele țări aleg aceeași cheie sau un mecanism aleator decide care țară are dreptul să împartă, sau se trece la o nouă cheie printr-o împărțire suplimentară. În cazul nostru, este tot țara P_1 căreia îi revine acest drept, iar țara P_2 urmează să aleagă două grupe. Să presupunem că țara P_2 alege grupele I_{1212}^2 și III_{1212}^2 ; cu alte cuvinte, țării P_2 îi revine (A_{12} , A_{21} , A_{14} , A_{24}). Rezultă atunci că țării P_1 îi revine complementara mulțimii considerate mai sus, adică (A_{22} , A_{13} , A_{25} , A_{16} , A_{11} , A_{23} , A_{25} , A_{15}). Conform regulilor jocului, țara P_2 este obligată să aleagă deoarece ea nu mai poate reîmpărți grupele sale prin încă două chei suplimentare.

Cazul cînd cheia mai mare stabilește țara care are dreptul să împartă armele, conduce și aici la un avantaj pentru țara care alege. În exemplul considerat mai sus, dacă țara P_1 alege grupele I_{2121}^1 și II_{2121}^1 , atunci își creează un avantaj materializat prin stocurile A_{11} , A_{24} , A_{25} , A_{15} , care, conform regulii 4, urmează să fie supuse unui procedeu simplu de « împarte și alege ». Dacă țara P_1 ar fi ales grupele I_{2121}^1 și IV_{2121}^1 , nu se poate vorbi despre un avantaj deoarece stocurile de arme nu au fost alese în ordinea dinainte stabilită a preferințelor; de asemenea, nu poate fi vorba despre un avantaj cînd țara P_1 alege grupe de pe lista țării P_2 .

Se poate întâmpla însă că la alegerea noului cifru, țara care împarte să se schimbe. Dacă în ipoteza că cheia mai mică are dreptul să împartă armele, în exemplul examinat mai sus la început țara P_1 avea acest drept deoarece își alesese cheia 4. Dacă însă ulterior cele două țări își aleg, respectiv, cheile (4, 8, 10) și (3, 8, 10), rezultă că țara P_2 urmează să-și impună împărțirea în grupe dată de cheia sa.

Să vedem care sînt avantajele acestui model extins față de cel propus de E. Singer și care, evident, poate fi încadrat în modelul general de la pct. 2. În primul rînd, fiecare țară are posibilitatea de a nu fi pusă în situația să aleagă dintre grupele impuse de adversar, putînd la rîndul ei să caute să-și impună propria-i împărțire. În al doilea rînd, se diminuează cazurile în care cheia mai mare ar duce la un avantaj pentru cel ce alege, dat fiind numărul mai mare de grupe de arme. În al treilea rînd ajungîndu-se la aceeași cheie, există posibilitatea de a exista o mutare întîmplătoare (prin recurgera la un mecanism aleator), trecînd la o împărțire nouă și deci la o cheie mai complicată, în care probabilitatea ca ele să coincidă, este evident cu mult mai redusă.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПЕРЕГОВОРОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

За кратким описанием применения теории игр в области переговоров и дипломатических отношений, авторы предлагают общую модель, основанную на игре двух лиц с ненулевой суммой, а также понятие о функции полезности. Далее, даётся модель обобщающая модель Зингера относительно переговоров о разоружении.

MATHEMATICAL MODELS FOR NEGOTIATIONS

ABSTRACT

After a short description of the applications of the theory of games to negotiation and diplomatic relationship a general model is suggested by making use of a two-person non-zero-sum game and of the concept of acceptance (utility) function. Further, a model generalizing the Singer bargaining model for disarmament negotiations is given.

Le point important dans ce problème est la nécessité de définir les conditions initiales et les conditions aux limites de la solution. On peut alors se demander si la solution est unique et si elle est stable. On peut alors se demander si la solution est unique et si elle est stable.

On peut alors se demander si la solution est unique et si elle est stable. On peut alors se demander si la solution est unique et si elle est stable. On peut alors se demander si la solution est unique et si elle est stable. On peut alors se demander si la solution est unique et si elle est stable.

MATHEMATICAL MODELS FOR PHYSICS

1. INTRODUCTION

The purpose of this paper is to discuss the mathematical models for physics. We will consider the models for classical mechanics, quantum mechanics, and relativity.

2. CLASSICAL MECHANICS

2.1. Newtonian Mechanics

Newtonian mechanics is the foundation of classical physics. It is based on Newton's laws of motion. The equations of motion are given by $F = ma$, where F is the force, m is the mass, and a is the acceleration.

UN MODEL CU VENIRI ÎN GRUP

G. CIUCU

Un model, analog cu cel considerat de noi¹, este caracterizat prin următoarele ecuații, în cazul regimului permanent :

$$(1) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) P_r(n) = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k(n-1) + \mu P_r(n+1) \\ P_k(n) = p_k P_k(n-1) + q_k P_r(n) \\ \mu P_r(1) = \lambda P_r(0) \end{cases}$$

Introducînd funcția generatoare

$$\varphi_r(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_r(n) u^n$$

obținem

$$(2) \quad \mu[\varphi_r(u) - P_r(0)] - \lambda P_r(0)u + \sum_{k=1}^m \lambda_k u^2 \varphi_k - (\lambda + \mu)[u \varphi_r(u) - u P_r(0)] = 0$$

egalitate ce rezultă din relațiile

$$\begin{aligned} \mu P_r(n+1) - (\lambda + \mu) P_r(n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k(n-1) &= 0 \\ \mu P_r(1) - \lambda P_r(0) &= 0 \end{aligned}$$

Din relația

$$P_k(n) = p_k P_k(n-1) + q_k P_r(n)$$

rezultă cu ușurință că

$$(3) \quad \varphi_k = \frac{q_k \varphi_r(u)}{1 - p_k u}$$

¹ vezi nota publicată în lucrările celei de a IV-a Consfătuiri a D.C.S.

Introducînd valoarea lui $\varphi_k(u)$ în (2) obținem

$$(1-u) \varphi_r(u) \left[\mu - \sum_{k=1}^m \frac{u \lambda_k}{1-p_k u} \right] = P_r(o) \mu (1-u)$$

sau

$$(4) \quad \varphi_r(u) \left[1 - \sum_{k=1}^m \frac{u \rho_k}{1-p_k u} \right] = P_r(o)$$

unde

$$\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu}$$

Din (4) rezultă

$$\varphi_r(u) = \frac{P_r(o)}{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k u}{1-p_k u}}$$

Cum însă

$$1 = \frac{P_r(o)}{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{1-p_k}}$$

avem

$$P_r(o) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{q_k}$$

În definitiv rezultă că

$$(5) \quad \varphi_r(u) = \frac{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{q_k}}{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k u}{1-p_k u}}$$

Se observă că dacă $p_k = 0$, atunci expresia funcției generatoare $\varphi_r(u)$ coincide cu cea corespunzătoare modelului cu o singură stație de serviciu, cu venituri infinite, independente și date de o lege Poisson de parametru λ .

Utilizînd expresia funcției generatoare date de (5) caracteristicile modelului caracterizat de ecuațiile (1) se calculează cu ușurință.

МОДЕЛЬ ГРУППОВЫХ ПРИХОДОВ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке изучается модель ожиданий данная уравнениями:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) P_r(n) = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k(n-1) + \mu P_r(n+1) \\ P_k(n) = p_k P_k(n-1) + q_k P_r(n) \\ \mu P_r(1) = \lambda P_r(0) \end{cases}$$

а также указано что соответствующей производящей функцией является:

$$\varphi_r(u) = \frac{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{q_k}}{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k u}{1 - p_k u}}$$

где $\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu}$, $\lambda = \sum_{k=1}^m \lambda_k$. Для других записей просмотреть заметку, опубликованную в работах четвертого совещания Д.Д.Ж.С. (Главная Дирекция статистики).

UN MODÈLE AVEC ENTRÉES EN GROUPE

RÉSUMÉ

Dans la présente note on analyse un modèle d'attente donné par les équations :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) P_r(n) = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k(n-1) + \mu P_r(n+1) \\ P_k(n) = p_k P_k(n-1) + q_k P_r(n) \\ \mu P_r(1) = \lambda P_r(0) \end{cases}$$

On y montre aussi que la fonction génératrice correspondente est :

$$\varphi_r(u) = \frac{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k}{q_k}}{1 - \sum_{k=1}^m \frac{\rho_k u}{1 - p_k u}}$$

où $\rho_k = \frac{\lambda_k}{\mu}$, $\lambda = \sum_{k=1}^m \lambda_k$. Pour d'autres notations, voir la note publiée dans les travaux de la IV-e session de la Direction Centrale de Statistique.

NOTES ON THE THEORY OF ESTIMATION

BY J. V. LARSEN

Department of Statistics, University of California, Berkeley, California

$$\left\{ \begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \theta \\ E(\hat{\theta}^2) &= \theta^2 + \frac{1}{n} \text{Var}(\theta) \\ E(\hat{\theta}^3) &= \theta^3 + \frac{3}{n} \theta \text{Var}(\theta) + \frac{1}{n} \text{Cov}(\theta, \theta^2) \end{aligned} \right.$$

These three equations are the first three moments of the estimator $\hat{\theta}$.

$$\frac{E(\hat{\theta}^2)}{E(\hat{\theta})^2} = \frac{\theta^2 + \frac{1}{n} \text{Var}(\theta)}{\theta^2} = 1 + \frac{\text{Var}(\theta)}{n\theta^2}$$

Let θ be the true value of the parameter. The first two equations above are the first two moments of the estimator $\hat{\theta}$. The third equation above is the third moment of the estimator $\hat{\theta}$.

ON THE THEORY OF ESTIMATION

BY J. V. LARSEN

Department of Statistics, University of California, Berkeley, California

$$\left\{ \begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \theta \\ E(\hat{\theta}^2) &= \theta^2 + \frac{1}{n} \text{Var}(\theta) \\ E(\hat{\theta}^3) &= \theta^3 + \frac{3}{n} \theta \text{Var}(\theta) + \frac{1}{n} \text{Cov}(\theta, \theta^2) \end{aligned} \right.$$

These three equations are the first three moments of the estimator $\hat{\theta}$.

$$\frac{E(\hat{\theta}^2)}{E(\hat{\theta})^2} = \frac{\theta^2 + \frac{1}{n} \text{Var}(\theta)}{\theta^2} = 1 + \frac{\text{Var}(\theta)}{n\theta^2}$$

Let θ be the true value of the parameter. The first two equations above are the first two moments of the estimator $\hat{\theta}$. The third equation above is the third moment of the estimator $\hat{\theta}$.

ASUPRA ACȚIUNII UNOR SARCINI CONCENTRATE ÎN INTERIORUL PLANULUI ELASTIC CU NEOMOGENITATE DISCONTINUĂ

N. ȘANDRU

1. Să considerăm planul elastic alcătuit din două materiale diferite, caracterizate prin constantele elastice E_1, ν_1 și E_2, ν_2 (modulul lui Young respectiv coeficientul lui Poisson), linia de separație fiind dreapta $y = 0$. Vom presupune că planul elastic astfel alcătuit este solicitat de sarcini concentrate (momente și forțe) în punctul de coordonate $(0, b)$ cu $b > 0$. Pentru rezolvarea problemelor vom alege funcții de tensiune diferite pentru cele două medii, punind condiții de continuitate relativ la tensiuni și deplasări, pe linia lor de separație. În calcule vom ține seama de rezultatele cunoscute relativ la acțiunea sarcinilor concentrate în planul elastic omogen [1].

2. Cazul momentului concentrat M .

Vom alege funcțiile de tensiune sub forma :

$$F_1(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} (A' + \alpha y B') e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \text{ pentru } y > 0 \quad (1)$$

$$F_2(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} (A'' + \alpha y B'') e^{\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \text{ pentru } y < 0, \quad (2)$$

unde $A' = A'(\alpha)$, $B' = B'(\alpha)$, $A'' = A''(\alpha)$, $B'' = B''(\alpha)$ sînt funcții care se vor determina din cele patru condiții de continuitate pe frontiera $y = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_y^{1'} + \sigma_y^1 &= \sigma_y^2, & \tau_{xy}^{1'} + \tau_{xy}^1 &= \tau_{xy}^2, \\ u_1' + u_1 &= u_2, & v_1' + v_1 &= v_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Corespunzător acestor funcții de tensiune vom avea următoarea stare de solicitare

$$\begin{aligned}\sigma_x^1 &= \int_0^\infty \alpha [A' - (2 - \alpha y) B'] e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \\ \sigma_y^1 &= - \int_0^\infty \alpha (A' + \alpha y B') e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \\ \tau_{xy}^1 &= \int_0^\infty \alpha [A' - (1 - \alpha y) B'] e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha,\end{aligned}\quad (4)$$

$$u_1 = -\frac{1}{E_1} \int_0^\infty \{A' (1 + \nu_1) + B' [(1 + \nu_1) \alpha y - 2]\} e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha,$$

$$v_1 = \frac{1}{E_1} \int_0^\infty \{A' (1 + \nu_1) + B' [(1 + \nu_1) \alpha y + 1 - \nu_1]\} e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha.$$

respectiv

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \int_0^\infty \alpha [A'' + (2 + \alpha y) B''] e^{\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \\ \sigma_y^2 &= - \int_0^\infty \alpha (A'' + \alpha y B'') e^{\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \\ \tau_{xy}^2 &= - \int_0^\infty \alpha [A'' + (1 + \alpha y) B''] e^{\alpha y} \cos \alpha x d\alpha,\end{aligned}\quad (5)$$

$$u_2 = -\frac{1}{E_2} \int_0^\infty \{A'' (1 + \nu_2) + B'' [(1 + \nu_2) \alpha y + 2]\} e^{\alpha y} \cos \alpha x d\alpha,$$

$$v_2 = -\frac{1}{E_2} \int_0^\infty \{A'' (1 + \nu_2) + B'' [(1 + \nu_2) \alpha y - 1 + \nu_2]\} e^{\alpha y} \sin \alpha x d\alpha.$$

Starea de sollicitare corespunzătoare acțiunii unui moment concentrat M în punctul $(0, b)$, al planului elastic omogen, este dată de

$$\begin{aligned}\sigma_x^{1'} &= \frac{M}{\pi} \frac{x(y-b)}{[x^2 + (y-b)^2]^2}, \\ \sigma_y^{1'} &= -\frac{M}{\pi} \frac{x(y-b)}{[x^2 + (y-b)^2]^2}, \\ \tau_{xy}^{1'} &= -\frac{M}{2\pi} \frac{x^2 - (y-b)^2}{[x^2 + (y-b)^2]^2}, \\ u_1' &= -\frac{1+\nu_1}{2\pi E_1} M \frac{(y-b)}{x^2 + (y-b)^2}, \\ v_1' &= \frac{1+\nu_1}{2\pi E_1} M \frac{x}{x^2 + (y-b)^2}.\end{aligned}\tag{6}$$

Pe linia de separație $y = 0$ obținem

$$\begin{aligned}\sigma_y^{1'} &= \frac{M}{\pi} \frac{xb}{(x^2 + b^2)^2}, \\ \tau_{xy}^{1'} &= -\frac{M}{2\pi} \frac{x^2 - b^2}{(x^2 + b^2)^2}, \\ u_1' &= \frac{1+\nu_1}{2\pi E_1} M \frac{b}{x^2 + b^2}, \\ v_1' &= \frac{1+\nu_1}{2\pi E_1} M \frac{x}{x^2 + b^2}.\end{aligned}\tag{7}$$

Condițiile (3) ne conduc la

$$\begin{aligned}& \frac{M}{\pi} \frac{xb}{(x^2 + b^2)^2} - \int_0^\infty \alpha A' \sin \alpha x d\alpha = - \int_0^\infty \alpha A'' \sin \alpha x d\alpha, \\ & -\frac{M}{2\pi} \frac{x^2 - b^2}{(x^2 + b^2)^2} + \int_0^\infty \alpha (A' - B') \cos \alpha x d\alpha = - \int_0^\infty \alpha (A'' + B'') \cos \alpha x d\alpha, \\ & \frac{1+\nu_1}{2\pi E_1} M \frac{b}{x^2 + b^2} - \frac{1}{E_1} \int_0^\infty [A' (1 + \nu_1) - 2B'] \cos \alpha x d\alpha = \\ & -\frac{1}{E_2} \int_0^\infty [A'' (1 + \nu_2) + 2B''] \cos \alpha x d\alpha, \\ & \frac{1+\nu_1}{2\pi E_1} M \frac{x}{x^2 + b^2} + \frac{1}{E_1} \int_0^\infty [A' (1 + \nu_1) + B' (1 - \nu_1)] \sin \alpha x d\alpha = \\ & = -\frac{1}{E_2} \int_0^\infty [A'' (1 + \nu_2) - B'' (1 - \nu_2)] \sin \alpha x d\alpha.\end{aligned}\tag{8}$$

Fie

$$\begin{aligned}
 \alpha A' - \alpha A'' &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_1(\alpha), \\
 -\alpha(A' - B') - \alpha(A'' + B'') &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_2(\alpha), \\
 \frac{1}{E_1} [A'(1 + \nu_1) - 2B'] - \frac{1}{E_2} [A''(1 + \nu_2) + 2B''] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_3(\alpha), \\
 \frac{1}{E_1} [A'(1 + \nu_1) + B'(1 - \nu_1)] - \frac{1}{E_2} [A''(1 + \nu_2) - B''(1 - \nu_2)] &= \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_4(\alpha).
 \end{aligned} \quad (9)$$

Folosind teorema de transformare, vom obține

$$\begin{aligned}
 F_1(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M}{\pi} b \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(x^2 + b^2)^2} dx, \\
 F_2(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(b^2 - x^2) \cos \alpha x}{(x^2 + b^2)^2} dx, \\
 F_3(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + \nu_1}{2\pi E_1} M b \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + b^2} dx, \\
 F_4(\alpha) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + \nu_1}{2\pi E_1} M \int_0^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + b^2} dx.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Ținând seama de [1] anexa 9, vom putea scrie

$$\begin{aligned}
 A' - A'' &= \frac{M}{2\pi} e^{-\alpha b} \\
 -A' + B' - A'' - B'' &= \frac{M}{2\pi} e^{-\alpha b}, \\
 \frac{1 + \nu_1}{E_1} A' - \frac{2}{E_1} B' - \frac{1 + \nu_2}{E_2} A'' - \frac{2}{E_2} B'' &= \frac{1 + \nu_1}{2\pi E_1} M e^{-\alpha b}, \\
 -\frac{1 + \nu_1}{E_1} A' - \frac{1 - \nu_1}{E_1} B' - \frac{1 + \nu_2}{E_2} A'' + \frac{1 - \nu_2}{E_2} B'' &= \frac{1 + \nu_1}{2\pi E_1} M e^{-\alpha b}.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Rezolvînd acest sistem, găsim

$$\begin{aligned}
 A'(\alpha) &= \frac{M}{2\pi} \frac{\frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1+\nu_1}{E_1}}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} e^{-\alpha b}, \\
 B'(\alpha) &= \frac{M}{\pi} \frac{\frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1+\nu_1}{E_1}}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} e^{-\alpha b}, \\
 A''(\alpha) &= \frac{M}{\pi} \left[\frac{\frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1+\nu_1}{E_1}}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} - 1 \right] e^{-\alpha b}, \\
 B''(\alpha) &= 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Se constată că în cazul egalității constantelor elastice $E_1 = E_2$ și $\nu_1 = \nu_2$ toate funcțiile astfel determinate sînt nule, în afară de $A''(\alpha)$ care este dat de $A''(\alpha) = -\frac{M}{2\pi} e^{-\alpha b}$ ceea ce era de așteptat, și corespunde cazului cînd planul elastic este considerat omogen.

Valorile obținute (12) rezolvă complet problema. Vom scrie explicit doar expresiile tensiunilor pe linia de separație $y = 0$.

$$\begin{aligned}
 \sigma_y &= \frac{M}{\pi} \left[1 - \frac{\frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1+\nu_1}{E_1}}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} \right] \frac{xb}{(x^2 + b^2)^2}, \\
 \tau_{xy} &= \frac{M}{2\pi} \left[1 - \frac{\frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1+\nu_1}{E_1}}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} \right] \frac{b^2 - x^2}{(x^2 + b^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

În fig. 1 se dă graficul de variație al acestor tensiuni în cazul $\nu_1 = \nu_2$ și $E_1 = 2E_2$.

Se constată, de asemenea, că tensiunea σ_x este discontinuă la traversarea liniei de separație $y = 0$.

3. Cazul forței concentrate P , paralelă cu Ox .

În acest caz funcțiile de tensiune vor avea tot forma (1) și (2).

Vom avea de asemenea (notatiile fiind aceleasi ca si în cazul precedent).

$$\begin{aligned}\sigma_x^{1'} &= -\frac{Px}{4\pi [x^2 + (y-b)^2]} \left[1 - \nu_1 + 2(1 + \nu_1) \frac{x^2}{x^2 + (y-b)^2} \right], \\ \sigma_y^{1'} &= \frac{Px}{4\pi [x^2 + (y-b)^2]} \left[1 - \nu_1 - 2(1 + \nu_1) \frac{(y-b)^2}{x^2 + (y-b)^2} \right], \\ \tau_{xy}^{1'} &= -\frac{P(y-b)}{4\pi [x^2 + (y-b)^2]} \left[1 - \nu_1 + 2(1 + \nu_1) \frac{x^2}{x^2 + (y-b)^2} \right],\end{aligned}\quad (14)$$

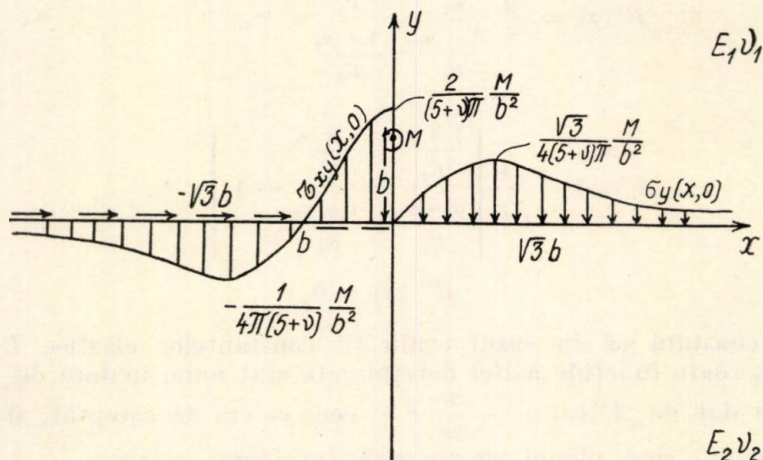


Fig. 1

$$w'_1 = -\frac{1 + \nu_1}{4\pi E_1} P \left[(1 + \nu_1) \frac{(y - b)^2}{x^2 + (y - b)^2} + \frac{3 - \nu_1}{3} \ln [x^2 + (y - b)^2] \right],$$

$$v'_1 = \frac{(1 + \nu_1)^2}{4\pi E_1} P \frac{x(y - b)}{x^2 + (y - b)^2}.$$

Din condițiile de continuitate (3) rezultă următorul sistem de ecuații liniare

$$\begin{aligned} \alpha A' - \alpha A'' &= \frac{P}{4\pi} [1 - \nu_1 - (1 + \nu_1) b \alpha] e^{-\alpha b}, \\ -\alpha A' + \alpha B' - \alpha A'' - \alpha B'' &= \frac{P}{4\pi} [2 - (1 + \nu_1) b \alpha] e^{-\alpha b}, \\ -\frac{1 + \nu_1}{E_1} A' + \frac{2}{E_1} B' + \frac{1 + \nu_2}{E_2} A'' + \frac{2}{E_2} B'' &= \frac{1 + \nu_1}{4\pi E_1} P \left[(1 + \nu_1) b - \right. \\ &\quad \left. - (3 - \nu_1) \frac{1}{\alpha} \right] e^{-\alpha b}, \\ \frac{1 + \nu_1}{E_1} A' + \frac{1 - \nu_1}{E_1} B' + \frac{1 + \nu_2}{E_2} A'' - \frac{1 - \nu_2}{E_2} B'' &= \frac{(1 + \nu_1)^2}{4\pi E_1} P b e^{-\alpha b}, \end{aligned} \quad (15)$$

care are soluția

$$A'(\alpha) = \frac{P}{8\pi} \left\{ \frac{\left[\frac{(3-\nu_1)(1+\nu_2)}{E_2} - \frac{(3-\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} \right] \frac{1}{\alpha} + 2b \left[\frac{(1+\nu_1)^2}{E_1} - \frac{(1+\nu_1)(1+\nu_2)}{E_2} \right]}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{(3-\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{(1+\nu_1)(3-\nu_2)}{E_2}}{\frac{3-\nu_2}{E_2} + \frac{1+\nu_1}{E_1}} \frac{1}{\alpha} \right\} e^{-\alpha b},$$

$$B'(\alpha) = \frac{P}{4\pi} \frac{\left[\frac{(3-\nu_1)(1+\nu_2)}{E_2} - \frac{(3-\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} \right] \frac{1}{\alpha} + 2b \left[\frac{(1+\nu_1)^2}{E_1} - \frac{(1+\nu_1)(1+\nu_2)}{E_2} \right]}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} e^{-\alpha b},$$

(16)

$$A''(\alpha) = \frac{P}{8\pi} \left\{ - \left[2 - 2\nu_1 - 2(1+\nu_1)b\alpha + \frac{\frac{(3-\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{(1+\nu_1)(3-\nu_2)}{E_2}}{\frac{3-\nu_2}{E_2} + \frac{1+\nu_1}{E_1}} \right] \frac{1}{\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\left[\frac{(3-\nu_1)(1+\nu_2)}{E_2} - \frac{(3-\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} \right] \frac{1}{\alpha} + 2b \left[\frac{(1+\nu_1)^2}{E_1} - \frac{(1+\nu_1)(1+\nu_2)}{E_2} \right]}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} \right\} e^{-\alpha b},$$

$$B''(\alpha) = - \frac{P}{4\pi} \left[1 + \nu_1 + \frac{\frac{(3-\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1} - \frac{(1+\nu_1)(3-\nu_2)}{E_2}}{\frac{3-\nu_2}{E_2} + \frac{1+\nu_1}{E_1}} \right] \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b}.$$

În cazul egalității constantelor elastice găsim $A' = B' = 0$ și

$$A''(\alpha) = \frac{P}{4\pi} [-1 + \nu + (1 + \nu)b\alpha] \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b},$$

$$B''(\alpha) = - \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b},$$

(17)

ceea ce corespunde planului elastic omogen solicitat de o forță concentrată P .

Valorile obținute (16) rezolvă complet problema. Pe linia de separație acționează tensiunile

$$\begin{aligned} \sigma_y = \frac{Px}{4\pi(x^2 + b^2)} & \left[1 - \nu_1 - \frac{3 - \nu_1}{2} \frac{\frac{1 + \nu_2}{E_2} - \frac{1 + \nu_1}{E_1}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} - \frac{1 + \nu_1}{2} \frac{\frac{3 - \nu_1}{E_1} - \frac{3 - \nu_2}{E_2}}{\frac{3 - \nu_2}{E_2} + \frac{1 + \nu_1}{E_1}} - \right. \\ & \left. - 2(1 + \nu_1) \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\frac{1 + \nu_1}{E_1} - \frac{1 + \nu_2}{E_2}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} \right) \frac{b^2}{x^2 + b^2} \right], \\ \tau_{xy} = \frac{Pb}{4\pi(x^2 + b^2)} & \left[2 + \frac{3 - \nu_1}{2} \frac{\frac{1 + \nu_1}{E_1} - \frac{1 + \nu_2}{E_2}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} + \frac{1 + \nu_1}{2} \frac{\frac{3 - \nu_1}{E_1} - \frac{3 - \nu_2}{E_2}}{\frac{3 - \nu_2}{E_2} + \frac{1 + \nu_1}{E_1}} - \right. \\ & \left. - (1 + \nu_1) \left(1 + 2 \frac{\frac{1 + \nu_1}{E_1} - \frac{1 + \nu_2}{E_2}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} \right) \frac{b^2 - x^2}{x^2 + b^2} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

a căror variație în cazul $\nu_1 = \nu_2$, $E_1 = 2E_2$ este dată în fig. 2.

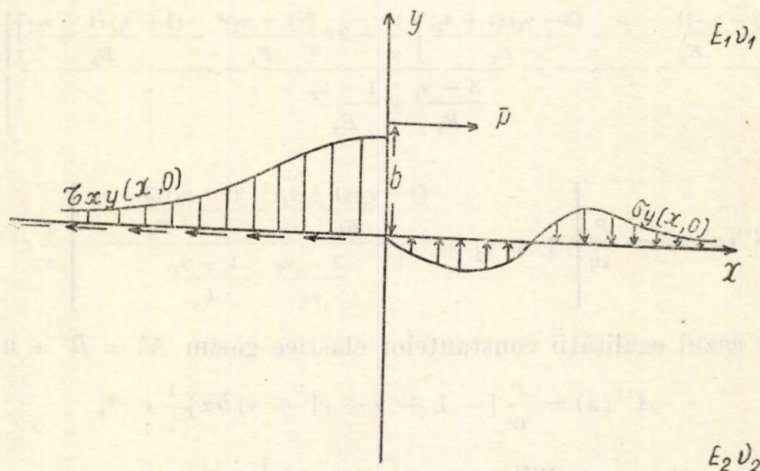


Fig. 2

Se constată că tensiunea σ_x este discontinuă la traversarea dreptei $y = 0$.

4. Cazul forței concentrate P paralelă cu Oy .

Vom alege funcțiile de tensiune sub forma

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} (A' + \alpha y B') e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \text{ pentru } y > 0, \\ F_2(x, y) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha} (A'' + \alpha y B'') e^{\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \text{ pentru } y < 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Starea de solicitare corespunzătoare fiind dată de

$$\begin{aligned} \sigma_x^1 &= \int_0^{\infty} \alpha [A' - (2 - \alpha y) B'] e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \\ \sigma_y^1 &= - \int_0^{\infty} \alpha (A' + \alpha y B') e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \\ \tau_{xy}^1 &= \int_0^{\infty} \alpha [-A' + (1 - \alpha y) B'] e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{E_1} \int_0^{\infty} \{A' (1 + \nu_1) + B' [-2 + (1 - \nu_1) \alpha y]\} e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \\ v_1 &= \frac{1}{E_1} \int_0^{\infty} \{A' (1 + \nu_1) + B' [1 - \nu_1 + (1 + \nu_1) \alpha y]\} e^{-\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \int_0^{\infty} \alpha [A'' + (2 + \alpha y) B''] e^{\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \\ \sigma_y^2 &= - \int_0^{\infty} \alpha (A'' + \alpha y B'') e^{\alpha y} \cos \alpha x d\alpha, \\ \tau_{xy}^2 &= \int_0^{\infty} \alpha [A'' + (1 + \alpha y) B''] e^{\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \end{aligned} \quad (21)$$

$$u_2 = \frac{1}{E_2} \int_0^{\infty} \{A'' (1 + \nu_2) + B'' [2 + (1 + \nu_2) \alpha y]\} e^{\alpha y} \sin \alpha x d\alpha$$

$$v_2 = - \frac{1}{E_2} \int_0^{\infty} \{A'' (1 + \nu_2) + B'' [-1 + \nu_2 + (1 + \nu_2) \alpha y]\} e^{\alpha y} \cos \alpha x d\alpha.$$

Vom avea de asemenea

$$\begin{aligned}\sigma_x^{1'} &= \frac{P(y-b)}{4\pi[x^2+(y-b)^2]} \left[1 - \nu_1 - 2(1+\nu_1) \frac{x^2}{x^2+(y-b)^2} \right], \\ \sigma_y^{1'} &= -\frac{P(y-b)}{4\pi[x^2+(y-b)^2]} \left[1 - \nu_1 + 2(1+\nu_1) \frac{(y-b)^2}{x^2+(y-b)^2} \right], \\ \tau_{xy}^{1'} &= -\frac{Px}{4\pi[x^2+(y-b)^2]} \left[1 - \nu_1 + 2(1+\nu_1) \frac{(y-b)^2}{x^2+(y-b)^2} \right], \\ u_1' &= \frac{(1+\nu_1)^2}{4\pi E_1} P \frac{x(y-b)}{x^2+(y-b)^2},\end{aligned}\quad (22)$$

$$v_1' = -\frac{1+\nu_1}{4\pi E_1} P \left[(1+\nu_1) \frac{x^2}{x^2+(y-b)^2} + \frac{3-\nu_1}{2} \ln [x^2+(y-b)^2] \right].$$

Punînd condițiile de continuitate (3) se obține sistemul

$$\begin{aligned}\alpha A' - \alpha A'' &= \frac{P}{4\pi} [2 + (1+\nu_1)b\alpha] e^{-\alpha b}, \\ -\alpha A' + \alpha B' - \alpha A'' - \alpha B'' &= \frac{P}{4\pi} [1 - \nu_1 + (1+\nu_1)b\alpha] e^{-\alpha b}, \\ \frac{1+\nu_1}{E_1} A' - \frac{2}{E_1} B' - \frac{1+\nu_2}{E_2} A'' - \frac{2}{E_2} B'' &= \frac{(1+\nu_1)^2}{4\pi E_1} P b e^{-\alpha b}, \\ \frac{1+\nu_1}{E_1} A' - \frac{1-\nu_1}{E_1} B' - \frac{1+\nu_2}{E_2} A'' - \frac{1-\nu_2}{E_2} B'' &= \frac{1+\nu_1}{4\pi E_1} P \left[(1-\nu_1)b + \right. \\ &\quad \left. + (3-\nu_1) \frac{1}{\alpha} \right] e^{-\alpha b}.\end{aligned}\quad (23)$$

Soluția sistemului (23) va fi

$$\begin{aligned}A'(\alpha) &= \frac{P}{8\pi} \left[4 + 2\alpha b(1+\nu_1) - \frac{4}{E_1} \frac{1+\nu_1}{\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{E_1} \frac{3-\nu_1+2\alpha b(1+\nu_1)}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} \right] \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b}, \\ B'(\alpha) &= \frac{P}{4\pi} \left[3 - \nu_1 + 2\alpha b(1+\nu_1) - \frac{4}{E_1} \frac{3-\nu_1+2\alpha b(1+\nu_1)}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} \right] \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b}, \\ A''(\alpha) &= -\frac{P}{2\pi E_1} \left[\frac{3-\nu_1+2\alpha b(1+\nu_1)}{\frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}} + \frac{1+\nu_1}{\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}} \right] \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b},\end{aligned}$$

$$B''(\alpha) = \frac{P}{\pi E_1} \frac{1 + \nu_1}{1 + \nu_1 + \frac{3 - \nu_2}{E_2}} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b}. \quad (24)$$

În cazul egalității constantelor elastice găsim $A' = B' = 0$ și

$$A''(\alpha) = -\frac{P}{4\pi} [2 + (1 + \nu)\alpha b] \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b}, \quad (25)$$

$$B''(\alpha) = \frac{P}{4\pi} (1 + \nu) \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha b},$$

ceea ce corespunde cazului planului elastic omogen solicitat de o forță P paralelă cu Oy .

Valorile (24) rezolvă complet problema. Pe linia de separație acționează tensiunile

$$\sigma_y = \frac{Pb}{2\pi(x^2 + b^2)} \left[\frac{\frac{1 + \nu_1}{E_1}}{\frac{1 + \nu_1}{E_1} + \frac{3 - \nu_2}{E_2}} + \frac{\frac{3 - \nu_1}{E_1}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} + 2 \frac{\frac{1 + \nu_1}{E_1}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} \frac{b^2 - x^2}{x^2 + b^2} \right], \quad (26)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Px}{2\pi(x^2 + b^2)} \left[\frac{\frac{3 - \nu_1}{E_1}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} - \frac{\frac{1 + \nu_1}{E_1}}{\frac{1 + \nu_1}{E_1} + \frac{3 - \nu_2}{E_2}} + 4 \frac{\frac{1 + \nu_1}{E_1}}{\frac{3 - \nu_1}{E_1} + \frac{1 + \nu_2}{E_2}} \frac{b^2}{x^2 + b^2} \right].$$

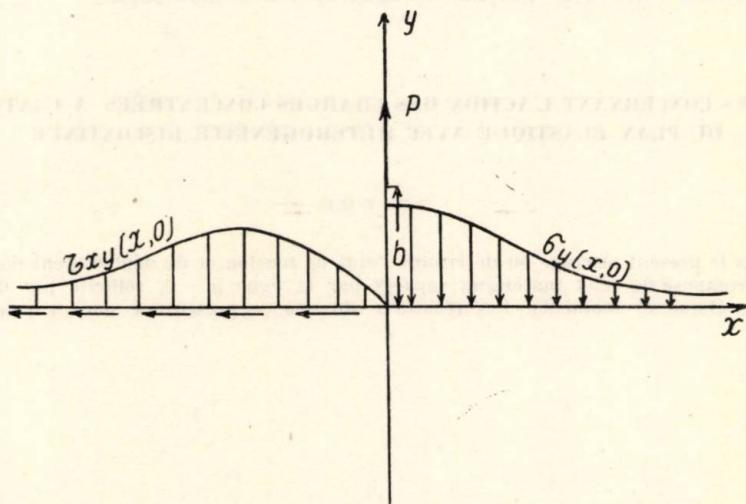


Fig. 3

Variația acestor tensiuni, în cazul $\nu_1 = \nu_2$, $E_1 = 2E_2$ este dată în fig. 3.

Tensiunea σ_x , cum era de așteptat, este discontinuă la traversarea liniei de separație $y = 0$.

5. În felul acesta am determinat starea de solicitare corespunzătoare acțiunii unor sarcini concentrate în interiorul planului elastic stratificat. Rezultatele obținute generalizează pe cele cunoscute din cazul planului elastic omogen. Pe aceeași cale se pot obține rezultate corespunzătoare acțiunii unor izvoare termice sau nuclee de deformare termoelastică pentru același domeniu considerat mai sus.

Menționăm de asemenea, că rezultatele obținute se puteau stabili și pe altă cale, folosind reprezentarea soluției Teoriei elasticității plane cu ajutorul funcțiilor complexe Kolosov-Mushelisvili.

BIBLIOGRAFIE

1. P. P. Teodorescu: Probleme plane în teoria elasticității, vol. I, Ed. Acad. R.P.R. 1961.

О ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК ВНУТРИ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе получены деформации и напряжённое состояние в упругой плоскости из двух материалов, разделённых линией $y = 0$, под действием сосредоточенных нагрузок (силы и момента). Результаты найдены в конечной форме.

DONNÉES CONCERNANT L'ACTION DES CHARGES CONCENTRÉES À L'INTÉRIEUR DU PLAN ÉLASTIQUE AVEC HÉTÉROGÉNÉITÉ DISCONTINUE

RÉSUMÉ

Dans le présent ouvrage on détermine l'état de tension et de déplacement dans un plan élastique, composé de deux matériaux séparés par la ligne $y = 0$, sollicité par des charges concentrées (force et moment). Les résultats obtenus se présentent sous leur forme finie.

APLICAȚII ALE TEORIEI PUNCTELOR SINGULARE DE TIPUL NOD GENERALIZAT LA DETERMINAREA CONDIȚIILOR DE ÎNCHIDERE PENTRU CURBE PLANE ȘI PENTRU SUPRAFETE

CONSTANTIN DRĂMBĂ

Considerăm ecuația diferențială

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)} \quad (1)$$

unde funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt de forma

$$P = \begin{vmatrix} X & Y \\ X_y & Y_y \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X & Y \end{vmatrix} \quad (2)$$

Presupunem că funcțiile $X(x, y)$ și $Y(x, y)$ sînt olomorfe și nule în origină. Vom folosi pentru derivatele parțiale notația prescurtată $X_x = \frac{\partial X}{\partial x}$, etc.

Pentru ecuația diferențială dată, origina ($x = y = 0$) este un punct singular de tipul nod generalizat, ceea ce înseamnă că fiind dată o direcție oarecare ce trece prin origină, există o curbă integrală (trecînd prin origină) tangentă la direcția dată. De altfel soluția în termeni finiți a ecuației (1) este $Y(x, y) = CX(x, y)$.

Ecuația caracteristică relativă la punctul singular $x = y = 0$ admite rădăcina dublă $J(0,0)$, adică valoarea în origină a determinantului funcțional

$$\ddot{J}(x, y) = \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X_y & Y_y \end{vmatrix} \quad (3)$$

pe care o presupunem diferentă de zero, $J(0,0) \neq 0$.

Fiind dată ecuația diferențială (1), adică funcțiile P și Q , se pot determina funcțiile X și Y ca soluții $\theta(x, y)$ ale ecuației cu derivate parțiale

$$P\theta_x + Q\theta_y = J\theta \quad (4)$$

unde valoarea determinantului funcțional este dată de relația

$$2J(x, y) = P_x + Q_y \quad (5)$$

care se stabilește ușor. Rezultă de aici că ecuația diferențială (1), în care P și Q au forma (2) nu constituie un caz particular. De altfel determinantul funcțional

$$\frac{D(P, Q)}{D(x, y)} \quad (6)$$

nu este identic nul, avînd în origină valoarea $J^2(0,0)$, diferită de zero, conform ipotezei anterioare. De aici rezultă în ipoteza olomorfiei, funcțiilor X și Y că determinantul funcțional (6) este diferit de zero într-o vecinătate a originii.

Considerăm acum traiectoriile

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ X_y & Y_y \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X & Y \end{vmatrix} dy = 0 \quad (7)$$

ortogonale curbelor definite de ecuația diferențială (1). Pentru ecuația (7) origina este un punct singular în raport cu care ecuația caracteristică

$$\lambda^2 + J^2(0,0) = 0 \quad (8)$$

are rădăcini pur complexe conjugate. Nu rezultă însă că origina ($x=y=0$) este un centru. În general curbele (7) sînt spirale admitînd origina ca focar. Prin urmare problema centrului și a focarului poate fi pusă în legătură cu ecuația diferențială (7). Vom observa în acest scop că transformarea

$$\begin{aligned} X &= X(x, y) \\ Y &= Y(x, y) \end{aligned} \quad (9)$$

pe care o presupunem biunivocă și bicontinuu face să corespundă curbelor integrale (1) din planul (x, y) , dreptele ce trec prin origină din planul (X, Y) . Avem

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix} X & Y \\ X_y & Y_y \end{vmatrix}} = \frac{dy}{\begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X & Y \end{vmatrix}} = \frac{dX}{JX} = \frac{dY}{JY} \quad (10)$$

Vom stabili acum condițiile ce trebuie îndeplinite de funcțiile X și Y pentru ca cercurile $X^2 + Y^2 = a^2$ să corespundă prin transformarea (9), curbelor (7), ortogonale curbelor definite de ecuația diferențială (1). Aceste condiții o dată stabilite, problema închiderii curbelor (7) este rezolvată.

Ecuația (7) se poate scrie

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ X_y & Y_y \end{vmatrix} \left\| \frac{dX}{dY} \frac{X_y}{Y_y} \right\| + \begin{vmatrix} X_x & Y_x \\ X & Y \end{vmatrix} \left\| \frac{X_x}{Y_x} \frac{dX}{dY} \right\| = 0 \quad (11)$$

și se reduce la ecuația $X dX + Y dY = 0$ a cercurilor cu centrul în origină, $X = Y = 0$, dacă

$$\begin{aligned} X_x Y_x + X_y Y_y &= 0 \\ X_x^2 + X_y^2 &= Y_x^2 + Y_y^2 \end{aligned} \quad (12)$$

În particular, condițiile (12) sînt îndeplinite atunci cînd funcțiile X, Y verifică relațiile lui Cauchy

$$X_x = Y_y, \quad X_y = -Y_x \quad (13)$$

Aplicație. Vom folosi calculele precedente spre a stabili un rezultat obținut de Horn [1] și Chazy [2] cu privire la forma ecuației implicite $F(x, y) = \text{const.}$, a curbelor închise admitînd un centru, pe care îl alegem ca origină ($x = y = 0$). Vom observa că fiind dată ecuația diferențială

$$F_x dx + F_y dy = 0 \quad (14)$$

corespunzătoare ecuației (7) avem și ecuația diferențială

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} \quad (15)$$

corespunzătoare ecuației (1). Presupunem că derivatele parțiale F_x și F_y se anulează în origină, $F_x^0 = F_y^0 = 0$. Funcțiile X și Y corespunzătoare se determină ca soluții $\theta(x, y)$ ale ecuației cu derivate parțiale

$$F_x \theta_x + F_y \theta_y = \frac{F_{xx} + F_{yy}}{2} \quad (16)$$

Putem scrie

$$F_x = \left| \begin{array}{cc} X & Y \\ X_y & Y_y \end{array} \right|, \quad F_y = \left| \begin{array}{cc} X_x & Y_x \\ X & Y \end{array} \right| \quad (17)$$

de unde obținem

$$F_{xy} = \left| \begin{array}{cc} X & Y \\ X_{yy} & Y_{yy} \end{array} \right|, \quad F_{yx} = \left| \begin{array}{cc} X_{xx} & Y_{yx} \\ X & Y \end{array} \right|$$

Diferența celor două derivate mixte de ordinul doi este

$$F_{xy} - F_{yx} = \left| \begin{array}{cc} X & Y \\ \Delta X & \Delta Y \end{array} \right| \quad (17)$$

și se anulează identic în cazul particular în care funcțiile X și Y verifică condițiile (13) ale lui Cauchy, deoarece operatorul lui Laplace aplicat funcțiilor X și Y este nul identic. Dacă nu ne situăm în cazul particular (13), recurgem la determinarea unui factor integrant. Ecuația caracteristică corespunzătoare ecuației diferențiale (15)

$$\left[\begin{array}{cc} F_{xx}^0 - \lambda & F_{xy}^0 \\ F_{xy}^0 & F_{yy}^0 - \lambda \end{array} \right] = 0 \quad (18)$$

admite o rădăcină dublă atunci cînd

$$F_{xy}^0 = 0 \quad F_{xx}^0 = F_{yy}^0 \neq 0$$

În acest caz ecuația curbelor $F(x, y) = \text{const}$ admite în domeniul originii dezvoltarea

$$x^2 + y^2 + S_3(x, y) = \text{const} \quad (19)$$

unde am notat prin $S_3(x, y)$ restul dezvoltării începînd cu termenii de gradul trei. Grupul $x^2 + y^2$ al termenilor de gradul doi este caracteristic ecuației (19), care datorită acestui fapt exprimă familia curbelor închise admițînd origina ca centru. Am demonstrat astfel pe altă cale rezultatul obținut de Horn și Chazy.

★

Vom considera acum cazul spațiului cu trei dimensiuni și vom dezvolta calcule, analoge cazului plan într-o anumită măsură, spre a obține condițiile de închidere ale unor suprafețe definite prin relații diferențiale. Ca aplicație vom obține un rezultat nou, cu privire la ecuația în termeni finiți a acestor suprafețe și acest fapt va constitui extinderea la cazul tridimensional al rezultatului obținut de Horn și Chazy pentru plan.

Fie sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (20)$$

unde avem

$$P = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X & Y & Z \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix}, \quad R = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \quad (21)$$

Presupunem că funcțiile $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ sînt olomorfe și nule în origină, care este un punct singular de tipul nod generalizat pentru traiectoriile definite de sistemul (19).

Ecuația caracteristică admite rădăcina triplă $J(0, 0, 0)$, pe care o presupunem diferită de zero și care este valoarea în origină a determinantului funcțional.

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} \quad (22)$$

Funcțiile X , Y , Z se determină ca trei soluții $\theta(x, y, z)$ ale ecuației cu derivate parțiale

$$P\theta_x + Q\theta_y + R\theta_z = J\theta \quad (23)$$

unde J este cunoscut prin relația

$$3J(x, y, z) = P_x + Q_y + R_z \quad (24)$$

care se deduce din expresiile (21). Sistemul diferențial (20) în care P , Q , R sînt de forma (21) nu este prin urmare un caz particular. De altfel determinantul funcțional

$$\frac{D(P, Q, R)}{D(x, y, z)} \quad (25)$$

nu este identic nul, avînd în origină valoarea $J^3(0, 0, 0)$, prin ipoteză diferită de zero. Funcțiile X , Y , Z fiind olomorfe, determinantul funcțional (25) este diferit de zero într-o vecinătate a originii.

Considerăm suprafețele

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0 \quad (26)$$

ortogonale traiectoriilor (20). Pentru a examina condițiile de închidere a suprafețelor (26), observăm că transformarea

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z) \\ Y &= Y(x, y, z) \\ Z &= Z(x, y, z) \end{aligned} \quad (27)$$

pe care o presupunem biunivocă și bicontinuuă, transformă traiectoriile (20) și care trec prin origina $x = y = z = 0$, în mulțimea dreptelor din spațiul (X, Y, Z) ce trec prin origina $X = Y = Z = 0$. Avem

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{dX}{JX} = \frac{dY}{JY} = \frac{dZ}{JZ} \quad (28)$$

Problema ce punem acum constă în determinarea condițiilor pe care să le verifice funcțiile X, Y, Z astfel încît sferile $X^2 + Y^2 + Z^2 = \text{const}$ și suprafețele (26) să se corespundă prin transformarea topologică (27). Prin determinarea acestor condiții, problema închiderii suprafețelor (26) va fi rezolvată.

Ecuția diferențială (26) se poate pune sub forma

$$\begin{aligned} &\left[P \frac{D(YZ)}{D(yz)} + Q \frac{D(YZ)}{D(zx)} + R \frac{D(YZ)}{D(xy)} \right] dX + \\ &\left[P \frac{D(ZX)}{D(yz)} + Q \frac{D(ZX)}{D(zx)} + R \frac{D(ZX)}{D(xy)} \right] dY + \\ &\left[P \frac{D(XY)}{D(yz)} + Q \frac{D(XY)}{D(zx)} + R \frac{D(XY)}{D(xy)} \right] dZ = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Pentru a serie condensat aceste condiții, pe baza cărora relația diferențială precedentă va fi de forma $XdX + YdY + ZdZ = 0$, vom introduce notația $X = X_1, Y = X_2, Z = X_3$, precum și notația $\frac{D(X_i X_j)}{D(x_k x_h)} = D_{kh}^{ij}$ pentru determinanții funcționali de ordinul doi. Avem expresiile condensate ale acestor condiții

$$\begin{aligned} &D_{23}^{31} D_{23}^{23} + D_{31}^{31} D_{31}^{23} + D_{12}^{31} D_{12}^{23} = 0 \\ &D_{23}^{12} D_{23}^{23} + D_{31}^{12} D_{31}^{23} + D_{12}^{12} D_{12}^{23} = 0 \\ &D_{31}^{12} D_{31}^{31} + D_{12}^{12} D_{12}^{31} + D_{23}^{12} D_{23}^{31} = 0 \\ &D_{31}^{23} D_{31}^{31} + D_{12}^{23} D_{12}^{31} + D_{23}^{23} D_{23}^{31} = 0 \\ &D_{12}^{23} D_{12}^{12} + D_{23}^{23} D_{23}^{12} + D_{31}^{23} D_{31}^{12} = 0 \\ &D_{12}^{31} D_{12}^{12} + D_{23}^{31} D_{23}^{12} + D_{31}^{31} D_{31}^{12} = 0 \\ &(D_{23}^{23})^2 + (D_{31}^{23})^2 + (D_{12}^{23})^2 = \\ &= (D_{31}^{31})^2 + (D_{12}^{31})^2 + (D_{23}^{31})^2 = \\ &= (D_{12}^{12})^2 + (D_{23}^{12})^2 + (D_{31}^{12})^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (30)$$

care sînt analoage cu condițiile (12) din cazul plan.

Aplicație. Vom extinde rezultatul lui Horn și Chazy la spațiul cu trei dimensiuni. Fie

$$F(x, y, z) = \text{const} \quad (31)$$

ecuația unei familii de suprafețe, funcția $F(x, y, z)$ fiind olomorfă și nulă în origină. Considerăm sistemul diferențial

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (32)$$

și presupunem că derivatele parțiale F_x, F_y, F_z sînt nule în origină. Funcțiile X, Y, Z se determină ca trei soluții $\theta(x, y, z)$ ale ecuației cu derivate parțiale

$$F_{xx}\theta_x + F_{yy}\theta_y + F_{zz}\theta_z = \frac{1}{3} \theta \Delta F \quad (33)$$

Origina este un punct singular de tipul nod generalizat atunci cînd ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} F_{xx}^0 - \lambda & F_{xy}^0 & F_{xz}^0 \\ F_{xy}^0 & F_{yy}^0 - \lambda & F_{yz}^0 \\ F_{xz}^0 & F_{yz}^0 & F_{zz}^0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

admite o rădăcină triplă, ceea ce se realizează dacă

$$\begin{aligned} F_{xy}^0 = F_{xz}^0 = F_{yz}^0 &= 0 \\ F_{xx}^0 = F_{yy}^0 = F_{zz}^0 &\neq 0 \end{aligned} \quad (35)$$

În acest caz ecuația $F(x, y, z) = \text{const}$ admite în domeniul originii, dezvoltarea

$$x^2 + y^2 + z^2 + S_3(x, y, z) = \text{const} \quad (36)$$

unde $S_3(x, y, z)$ reprezintă restul dezvoltării începînd cu termenii de gradul trei. Grupul $x^2 + y^2 + z^2$ al termenilor de gradul doi este caracteristic pentru ecuația (31) care reprezintă o familie de suprafețe închise pentru care origina este un centru.

Ecuația (31) constituie extinderea la cazul spațiului trei dimensiuni a rezultatului obținut de Horn și Chazy pentru cazul plan.

BIBLIOGRAFIE

1. Horn: Zeitschrift für Mathematik und Physik, Band 47, 1902, p. 400—428 und Band 48, 1903, p. 400—434.
2. Chazy: Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome XV, fascicule IV, 1936.

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ТИПА ОБОБЩЕННОГО УЗЛА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ УСЛОВИЙ ЗАМЫКАНИЯ ДЛЯ ПЛОСКИХ КРИВЫХ И ДЛЯ ПОВЕРХНОСТИ

К Р А Т К О Е С О Д Е Р Ж А Н И Е

Используя понятие особой точки вида обобщённого узла, даётся новая демонстрация результата Горна и Шази, касающегося условий замыкания для кривых, определённых одним дифференциальным уравнением. Таким образом получается уравнение (9).

Тем же методом, основанным на понятии особой точки вида обобщённого узла, результат Горна и Шази был распространён на случаи трёхмерного пространства и таким образом получилось уравнение (36), которое представляет семейство замкнутых поверхностей.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES POINTS SINGULIERS DU TYPE NOEUD GÉNÉRALISÉ À LA DÉTERMINATION DES CONDITIONS POUR QUE CERTAINES COURBES ET SURFACES SOIENT FERMÉES

R É S U M É

En utilisant la notion de point singulier du type noeud généralisé on arrive à rétablir le résultat de Horn et de Chazy, (19).

Par le même procédé on arrive à étendre ce résultat au cas de l'espace à trois dimensions en déterminant l'équation (36) des surfaces fermées entourant l'origine.

TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE PENTRU ECUAȚII CU DIFERENȚIALE ÎN SPAȚII LOCAL CONVEXE

CONSTANTIN APOSTOL

Introducere

Fie X și Y două spații local convexe cu familiile suficiente și dirijate de semi-norme A , B și Y complet în raport cu șirurile.

Să considerăm o vecinătate U în X a unui punct dat și o operație T definită pe U cu valori în Y .

Dacă T este diferențiabilă Gâteaux în fiecare puncte din U și aplicația $\delta T[x; *] : X \rightarrow Y$ este liniară și continuă pentru fiecare x , numim derivata Gâteaux, aplicația $T' : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ determinată de relația $T'(x)h = \delta T(x; h)$ pentru orice $h \in X$.

Autorul studiază ecuația $T'(x) = f[x, T(x)]$ cu condiția $T(0) = 0$, în care T' este derivata Gâteaux.

În prima parte a lucrării sînt enunțate ipotezele și sînt deduse unele proprietăți ale lui f în două leme. În a doua parte este dată demonstrația și cercetat cazul cînd soluția T este diferențiabilă Fréchet.

I. Fie $Z = X \times Y$ produsul cartezian al spațiilor X, Y organizat ca spațiu local convex cu familia suficientă de seminorme $C = A \times B$.

Dacă $z_1, z_2 \in Z$, avem $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ cu $x_1, x_2 \in X$ și $y_1, y_2 \in Y$ și $\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$, $|z|_c = |x|_a + |y|_b$, $c = (a, b)$.

Notînd $\mathcal{L}(X, Y)$ mulțimea aplicațiilor liniare și continue, definite pe X cu valori în Y , se știe că aceasta este reuniunea pseodotopologică $\bigcup_{\varphi} \mathcal{L}_{\varphi}(X, Y)$, a spațiilor local convexe $\mathcal{L}_{\varphi}(X, Y)$, unde φ sînt aplicațiile mulțimii B în A [3]. $\mathcal{L}_{\varphi}(X, Y)$ este mulțimea aplicațiilor liniare T , definite pe X cu valori în Y și cu proprietatea :

$$|T|_{b, \varphi(b)} = \sup \frac{|Th|_b}{|h|_{\varphi(b)}} < \infty \text{ pentru orice } b \in B.$$

Definiție. Fie $\psi : B \rightarrow B$ o aplicație a lui B în B și $\psi^0(b) = b$, $\psi_1(b) = \psi(b)$,....., $\psi_n(b) = \psi(\psi_{n-1}(b))$ pentru $n = 1, 2, \dots$. Spunem că ψ este cu iterate mărginite dacă pentru fiecare $b \in B$ există un element $\bar{b}$ cu proprietatea $\psi_n(b) \leq \bar{b}$ pentru orice n natural ($b_1 \leq b_2 \Leftrightarrow |*|_{b_1} \leq |*|_{b_2}$).

Să considerăm mulțimea $V = \{z \mid z \in Z, |z|_{c_0} \leq r, c_0 = (a_0, b_0)\}$ și fie $f : V \rightarrow \mathcal{L}(X; Y)$ o aplicație cu următoarele proprietăți :

1. $|f(x, y)|_{b, a_0} \leq M_b < \infty$, deci $f(x, y) \in \mathcal{L}_{\varphi_0}(X, Y)$ cu $\varphi_0(b) = a_0$.
2. Există o aplicație $\psi : B \rightarrow B$ cu iteratele mărginite și cu proprietatea $|f(x, y_1) - f(x, y_2)|_{b, a_0} \leq K_b |y_1 - y_2|_{\psi(b)}, K_{\psi_m(b)} \leq K_b, m = 1, 2, \dots$
3. Notînd $V_y = \{x \mid x \in X, (x, y) \in V\}$, pentru h fixat, aplicația $f(*, y)h : V_y \rightarrow Y$ este continuă pe varietăți plane.
4. Pentru $|z|_{c_0} < r$, f este diferențiabilă Gateaux, cu diferențiala liniară și continuă.

4.1. Pentru $h \in X$ fixat și orice varietate plană $P(x)$ dată în X , care conține pe x , există o vecinătate $U(z)$ a lui z , astfel încît familia de aplicații $\delta f[x', y'; 0, *]h : Y \rightarrow Y$ este egal continuă, dacă $(x', y') \in U(z)$ și $x' \in P(x)$.

4.2. Pentru orice $h, g \in X$ și $v \in Y$ fixați, aplicația $\delta f[* , * ; h, v]g : V \rightarrow Y$ este continuă dacă x se află pe varietăți plane.

4.3. $\delta f[x, y; h, 0]g = \delta f[x, y; g, 0]h, h, g \in X$

4.4. $\delta f[x, y; 0, f(x, y'), h]g = \delta f[x, y; 0, f(x, y'), g]h; h, g \in X$

Lemma 1 Fie R o aplicație a unei vecinătăți U a lui O în X , cu valori în Y , continuă pe varietăți plane și cu graficul $(x, R(x))$ în interiorul lui V . Mai presupunem că R este diferențială cu diferențiala liniară și continuă și aplicația $\delta R[* ; h] : U \rightarrow Y$ este continuă pe varietăți plane.

În aceste ipoteze operația $S : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ definită prin relația $S(x) = f(x, R(x))$ are următoarele proprietăți :

1. $S(*)h : U \rightarrow Y$ este continuă pe varietăți plane
2. S este diferențiabilă Gateaux cu diferențiala liniară și continuă în fiecare punct $x \in U$.

3. $\delta S[* ; h]g : U \rightarrow Y$ este continuă pe varietăți plane.

Demonstrație 1. $|S(x')h - S(x)h|_b = |f(x', R(x'))h - f(x, R(x))h|_b \leq |f(x', R(x'))h - f(x', R(x))h|_b + |f(x', R(x))h - f(x, R(x))h|_b \leq |f(x', R(x')) - f(x', R(x))|_{b, a_0} |h|_{a_0} + |f(x', R(x))h - f(x, R(x))h|_b \leq K_b |R(x') - R(x)|_{\psi(b)} |h|_{a_0} + |f(x', R(x))h - f(x, R(x))h|_b$.

Dar R este continuă pe varietăți plane deci $|R(x') - R(x)|_{\psi(b)} < \varepsilon_1$ dacă x' se află într-o anumită vecinătate U_1 a lui x și datorită proprietății 3 a lui f avem și $|f(x', R(x))h - f(x, R(x))h|_b < \varepsilon_1$ dacă $x' \in U_2(x)$

Rezultă că $|S(x')h - S(x)h|_c < \varepsilon$ dacă $x' \in U_1 \cap U_2$

2. Să arătăm, că $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(x+sh) - S(x)}{s}$ există.

Aplicînd definiția lui S , avem

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+sh, R(x+sh)) - f(x, R(x))}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+sh, R(x+sh)) - f(x+sh, R(x) + s\delta R[x; h])}{s} +$$

$$+ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x+sh, R(x) + s\delta R[x; h]) - f(x, R(x))}{s}.$$

Prima limită este 0, căci pentru s suficient de mic în modul avem $|f(x+sh, R(x+sh)) - f(x+sh, R(x) + s\delta R[x; h])|_{b, a} \leq K_b |R(x+sh) - R(x) - s\delta R[x; h]|_{\psi(b)}$

A doua limită este $\delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]$ datorită proprietății 4 a lui f , deci S este diferențiabilă și $\delta S[x; h] = \delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]$.

Să arătăm acum că aplicația $\delta S[x; *]: X \rightarrow \mathcal{E}(X, Y)$ este liniară și continuă.

Datorită linearității lui δf avem:

$$\delta S[x; \alpha h + \beta g] = \delta f[x, R(x); \alpha h + \beta g, \delta R[x; \alpha h + \beta g]] = \alpha \delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]] + \beta \delta f[x, R(x); g, \delta R[x; g]] = \alpha \delta S[x; h] + \beta \delta S[x; g] \text{ deci liniaritatea a fost demonstrată.}$$

Prin ipoteză aplicația $\delta f[x, R(x); *, *]: Z \rightarrow \mathcal{E}(X, Y)$ este continuă. $\mathcal{E}(X, Y)$ fiind reuniunea pseudotopologică $U_\varphi \mathcal{E}_\varphi(X, Y)$ continuitatea implică existența unei aplicații $\varphi_1: B \rightarrow A$ astfel încît imaginea spațiului local convex Z prin $\delta f[x, R(x); *, *]$ este în spațiul local aconvex $\mathcal{E}_{\varphi_1}(X, Y)$ și aplicația $\delta f[x, R(x); *, *]$ este continuă de la Z la $\mathcal{E}_{\varphi_1}(X, Y)$. Datorită linearității lui δf avem $\delta f[x, R(x); *, *] \in \mathcal{E}(Z, \mathcal{E}_{\varphi_1}(X, Y))$.

Va fi suficient să arătăm că $\delta S[x; *] \in \mathcal{E}(X, \mathcal{E}_{\varphi_1}(X, Y))$

Dacă notăm graficul lui φ_1 cu D , deoarece $\delta f[x, R(x); *, *] \in \mathcal{E}(Z, \mathcal{E}_{\varphi_1}(X, Y))$ există o aplicație $\chi_1: D \rightarrow C$ și $|\delta f[x, R(x); h, g]|_d \leq N_d(h, g) |\chi_1(d)| = N_d(|h|_{a_1(d)} + |g|_{b_1(d)})$ cu $\chi_1(d') = (a_1(d), b_1(d))$.

Dar $|\delta S[x; h]|_d = |\delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]|_d \leq N_d(|h|_{a_1(d)} + |\delta R[x; h]|_{b_1(d)})$.

Datorită continuității aplicației $\delta R(x; *)$, există $a_2(d)$ și Q_d astfel încît

$$|\delta S[x; h]|_d \leq N_d(|h|_{a_1(d)} + Q_d |h|_{a_1(d)})$$

Folosind dirijarea lui A există un element în A , $\chi(d)$ cu proprietatea $\chi_d \geq a_1(d)$, $\chi_d \geq a_2(d)$. Am definit astfel aplicația $\chi: D \rightarrow A$ și deoarece $|\delta S[x; h]|_d \leq N_d(1 + Q_d) |h|_{\chi(d)}$ aplicația $\delta S[x; *] \in \mathcal{E}_\chi(X, \mathcal{E}_{\varphi_1}(X, Y))$, deci este un element din $\mathcal{E}(X, \mathcal{E}_{\varphi_1}(X, Y))$.

3. Avem:

$$|\delta S[x'; h] - \delta S[x; h]|_b = |\delta f[x', R(x'); h, \delta R[x'; h]]g - \delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]g|_b \leq |\delta f[x', R(x'); h, \delta R[x'; h]]g - \delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]g|_b + |\delta f[x', R(x'); h, \delta R[x; h]]g - \delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]g|_b.$$

$$\text{Dar } |\delta f[x', R(x'); h, \delta R[x'; h]]g - \delta f[x', R(x'); h, \delta R[x; h]]g| = |\delta f[x', R(x'); 0, \delta R[x'; h] - \delta R[x; h]]g|$$

Datorită proprietății 4.1 a lui f , R fiind continuă pe varietăți plane există o vecinătate $U_1(z)$ cu $z = (x, R(x))$ astfel încît familia $\delta f[x', R(x'); 0, *]g$ este egal continuă dacă $(x', R(x')) \in U_1(z)$, căci x' tinde la x pe o varietate plană. Aceasta va avea loc dacă $x' \in U_2$ căci R este continuă pe varietăți plane. Folosind și continuitatea aplicației $\delta R[x; h]$ pe varietăți plane, vom avea

$$|\delta f[x', R(x'); 0, \delta R[x'; h] - \delta R[x; h]]g|_b < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dacă } x' \in U_2$$

Datorită proprietății 4.2 rezultă

$$|\delta f[x', R(x'); h, \delta R[x; h]]g - \delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]g|_b < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dacă } x' \in U_3$$

Deci $|\delta S[x'; h]g - \delta S[x; h]g|_b < \varepsilon$ dacă $x' \in U_2 \cap U_3$.

Lema 2. Fie R aplicația din lema 1 și în plus cu proprietatea:

Pentru orice $x \in U$ există $y_x \in Y$ și $|(x, y_x)|_{c_0} < r$ astfel încît $\delta R[x; h] = f(x, y_x)h$ pentru orice $h \in X$.

În aceste ipoteze aplicația $F: U \rightarrow Y$ determinată prin relația

$$F(x) = \int_0^1 S(tx) x dt, \text{ cu } S(x) = f(x, R(x)) \text{ este continuă și diferențiabilă}$$

Găteaux în fiecare punct $x \in U$ cu diferențiala liniară și continuă și $F'(x) = f(x, R(x))$.

Demonstrație. În afară de proprietățile 1, 2, 3 din lema 1, operația S are proprietatea $\delta S[x; h]g = \delta S[x; g]h$ pentru $h, g \in X$.

În adevăr avem $\delta S[x; h]g = \delta f[x, R(x); h, \delta R[x; h]]g = \delta f[x, R(x); h, 0]g + \delta f[x, R(x); 0, f(x, y_x)h]g$ și datorită proprietăților 4.3 și 4.4 ale lui f , $\delta S[x; h]g = \delta f[x, R(x); g, 0]h + \delta f[x, R(x); 0, \delta R[x; g]]h = \delta f[x, R(x); g, \delta R[x; g]]h = \delta S[x; g]h$.

Să evaluăm diferența $F(x+g) - F(x)$ ¹ [2], [3].

$$\begin{aligned} F(x+g) - F(x) &= \int_0^1 S(tx+tg)(x+g) dt - \int_0^1 S(tx)x dt = \\ &= \int_0^1 S(tx+tg)g dt + \int_0^1 [S(tx+tg) - S(tx)]x dt \end{aligned}$$

Folosind proprietățile lui S putem scrie:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [S(tx+tg) - S(tx)]x dt &= \int_0^1 dt \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} S(tx+zg) x dz = \\ &= \int_0^1 dt \int_0^1 \delta S[tx+\tau g; g] x d\tau = \int_0^1 dt \int_0^1 \delta S[tx+\tau g; x] g d\tau = \\ &= \int_0^1 dz \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} S(tx+\tau g) g dt = \int_1^0 S(x+\tau g) g d\tau - \int_0^0 S(\tau x+\tau g) g d\tau \\ \text{Deci } F(x+g) - F(x) &= \int_0^1 S(x+\tau g) g d\tau \end{aligned}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(x+sh) - F(x)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^1 S(x+\tau sh) h d\tau = S(x)h = f(x, R(x))h.$$

¹ Demonstrația este asemănătoare cu aceea din cazul spațiilor verticale normate. Vezi „G. Marinescu — Spații vectoriale normate”, Ed. Acad. R.P.R. 1956. Diferențiala Câteaux.

Din proprietățile lui $S(x) = f(x, R(x))$ rezultă liniaritatea și continuitatea lui δF .

Pentru a arăta continuitatea lui F pe varietăți plane să evaluăm $F(x') - F(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Avem } F(x') - F(x) &= F(x + x' - x) - F(x) = \\ &= \int_0^1 S(x + z(x' - x))(x' - x) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{și deci } |F(x') - F(x)|_b &\leq \int_0^1 |S(x + z(x' - x))|_{b, a_0} |x' - x|_a dz \leq \\ &\leq M_b |x' - x|_a \text{ deoarece } S(x) = f(x, R(x)). \end{aligned}$$

II. *Teoremă.* Fie f aplicația din I. Ecuația $T'(x) = f(x, T(x))$ (1), cu condiția $T(0) = 0$, are o soluție și numai una, definită într-o vecinătate U lui 0 în X , continuă pe varietăți plane.

Demonstrație. Să presupunem că (1) are o soluție T și $T(0) = 0$, T fiind continuă pe varietăți plane. Datorită lemelor 1 și 2 operația

definită prin $T(x) - \int_0^1 f(tx, T(tx)) x dt$ are derivată Gâteaux și aceasta

este 0. Deci $T(x) - \int_0^1 f(tx, T(tx)) x dt = ct$.

$$\text{Cum } T(0) = 0 \text{ vom avea identic } T(x) = \int_0^1 f(tx, T(tx)) x dt. \quad (2)$$

Vom demonstra că ecuația (2) are soluție unică, continuă pe varietăți plane și satisface ecuația (1). Cum orice soluție a ecuației (2) continuă pe varietăți plane satisface condiția $T(0) = 0$ teorema va fi complet demonstrată, unicitatea soluției fiind implicată de unicitatea soluției pentru ecuația (2).

Căutăm o soluție pentru ecuația (2) prin aproximări succesive.

Fie $T_0 = 0$ și $S_1(x) = f(x, 0)$. Operațiile T_0 și S_1 , au proprietățile lui R și S din lema 1. În plus $\delta S_1[x; h]g = \delta f[x, 0; h, 0]g = \delta f[x, 0; g, 0]h = \delta S_1[x; g]h$ datorită proprietății 4.3 a lui f . Cum S_1 are proprie-

tățile lui S din lema 2, luând aproximația următoare $T_1(x) = \int_0^1 S_1(tx) x dt$

vom avea $T_1(x) = f(x, 0)$ și T_1 , continuă pe varietăți plane.

$$\text{Fie deci } T_1(x) = \int_0^1 S_1(tx) x dt.$$

Deoarece $|S_1(tx) x|_{b_0} = |f(tx, 0) x|_{b_0} \leq |f(tx, 0)|_{b_0, a_0} |x|_{a_0} \leq M_{b_0} |x|_{a_0}$ dacă $|x|_{a_0} < r_1$ cu $r_1 = \min\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2M_{b_0}}\right)$

vom avea $|T_1(x)|_{b_0} < \frac{r}{2}$ și $|(x, T_1(x))|_{c_0} < r$

T_1 avînd proprietățile lui R din lema 1 și 2, cu

$U = \{x | x \in X \text{ și } |x|_{a_0} < r_1\}$. S_2 definit, prin $S_2(x) = f(x, T_1(x))$

determină operația corespunzătoare $T_2(x) = \int_0^1 S_2(tx) x dt$ și $T_2'(x) =$

$$= f(x, T_1(x)) \text{ cu } |T_2(x)|_{b_0} \leq \int_0^1 |S_2(tx)|_{b_0} dt \leq M_{b_0} |x|_{a_0} \text{ deci } x \in U \Rightarrow$$

$$|T_2(x)|_{b_0} < \frac{r}{2} \text{ și } |(x, T_2(x))|_{c_0} < r.$$

Să presupunem că avem $T_n(x) = \int_0^1 S_n(tx) x dt$, cu $S_n(x) = f(x,$

$T_{n-1}(x))$, cu T_{n-1} continuă pe varietăți plane în U , $T_{n-1}'(x) = f(x,$

$T_{n-2}(x)$ și $|(x, T_{n-1}(x))|_{c_0} < r$.

Aplicînd lemele 1 și 2, T_n este continuă pe varietăți plane și $T_n'(x) =$

$$= f(x, T_{n-1}(x)), |T_n(x)|_{b_0} \leq \int_0^1 |S_n(tx)|_{b_0} dt \leq M_{b_0} |x|_{a_0}.$$

Deci $|T_n(x)|_{b_0} < \frac{r}{2}$ și $|(x, T_n(x))|_{c_0} < r$ dacă $x \in U$.

Să arătăm că $T_n(x)$ este fundamental uniform pentru $x \in U$.

Cum $T_n(x) = \sum_{i=1}^n T_i(x) - T_{i-1}(x)$ va fi suficient să arătăm că seria

$\sum_{i=1}^{\infty} |T_n(x) - T_{n-1}(x)|_b$ este uniform convergentă pentru orice $b \in B$.

Pentru $x \in U$ vom avea

$$|T_1(x) - T_0(x)|_{\bar{b}} = |T_1(x)|_{\bar{b}} \leq M_{\bar{b}} |x|_{a_0}.$$

Deoarece ψ este cu iterate mărginite și folosind proprietatea 2 a lui f .

$$|T_2(x) - T_1(x)|_{\psi_m(b)} \leq \int_0^1 |f(tx, T_1(tx)) - f(tx, 0)|_{\psi_m(b)} |x|_{a_0} dt \leq$$

$$\leq K_{\psi_m(b)} |x|_{a_0} \int_0^1 |T_1(tx)|_{\psi_{m+1}(b)} dt \leq \bar{K}_b |x|_{a_0} \int_0^1 |T_1(tx)|_{\bar{b}} dt \leq \bar{K}_b |x|_{a_0}^2 M_{\bar{b}}$$

$$\int_0^1 t dt = M_{\bar{b}} \bar{K}_b \frac{|x|_{a_0}^2}{2!}.$$

Să presupunem că $|T_n(x) - T_{n-1}(x)|_{\psi_m(b)} \leq M_{\bar{b}} K_b^{n-1} \frac{|x|_{a_0}^n}{n!}$ pentru

$m = 0, 1, 2, \dots$ și să evaluăm $|T_{n+1}(x) - T_n(x)|_{\psi_m(b)}$. Avem $|T_{n+1}(x) -$

$$T_n(x) |_{\psi_m(b)} \leq \int_0^1 |f(tx, T_n(tx)) - f(tx, T_1(x))|_{\psi_m(b), a_0} |x|_{a_0} dt \leq K_{\psi_m(b)} |x|_{a_0}$$

$$\int_0^1 |T_n(tx) - T_{n-1}(tx)|_{\psi_{m+1}(b)} dt \leq K_{\psi_m(b)} \bar{K}_b^{n-1} M_b \frac{|x|_{a_0}^{n+1}}{n!} \int_0^1 t dt \leq M_b \bar{K}_b^n \frac{|x|_{a_0}^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{Deci } |T_{n+1}(x) - T_n(x)|_{\psi_m(b)} \leq M_b \bar{K}_b^n \frac{|x|_{a_0}^{n+1}}{(n+1)!}.$$

$$\text{Dacă facem } m = 0 \text{ obținem } |T_{n+1}(x) - T_n(x)|_b \leq M_b \bar{K}_b^n \frac{|x|_{a_0}^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Rezultă că $T_n \xrightarrow{u} T$, datorită completitudinii prin șiruri a lui Y .
 T va fi continuă pe varietăți plane datorită convergenței uniforme.

T este soluție pentru ecuația (2).

$$\begin{aligned} \text{În adevăr } |T(x) - \int_0^1 f(tx, T(tx)) x dt|_b &\leq |T(x) - T_n(x)|_b + \\ + \left| \int_0^1 [f(tx, T_{n-1}(tx)) - f(tx, T(tx))] x dt \right|_b &< \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^1 |f(tx, T_{n-1}(tx)) - \\ - f(tx, T(tx))|_{b, a_0} |x|_{a_0} dt &\leq \frac{\varepsilon}{2} + K_b |x|_{a_0} \int_0^1 |T_{n-1}(tx) - T(tx)|_{\psi(b)} dt < \varepsilon \end{aligned}$$

dacă $n > n_0(\varepsilon)$.

Să presupunem că ecuația (2) ar avea o soluție L , continuă pe varietăți plane, diferită de T în U .

$$\text{Avem } |L(x)|_b \leq \int_0^1 |f(tx, L(tx))|_{b, a_0} |x|_{a_0} dt \leq M_b |x|_{a_0}.$$

$$\begin{aligned} |L(x) - T_1(x)|_{\psi_m(b)} &\leq \int_0^1 |f(tx, L(tx)) - f(tx, T_1(tx))|_{\psi_m(b), a_0} |x|_{a_0} dt \leq \\ &\leq K_{\psi_m(b)} |x|_{a_0} \int_0^1 |L(tx)|_{\psi_m(b)} dt \leq K_{\psi_m(b)} |x|_{a_0} \int_0^1 |L(tx)|_b dt \leq M_b \bar{K}_b^n \frac{|x|_{a_0}^2}{2!}. \end{aligned}$$

Să presupunem că $|L(x) - T_n(x)|_{\psi_m(b)} \leq M_b \bar{K}_b^n \frac{|x|_{a_0}^{n+1}}{(n+1)!}$ pentru $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{În acest caz } |L(x) - T_{n+1}(x)|_{\psi_m(b)} \leq \int_0^1 |f(tx, L(tx)) - f(tx, T_n(tx))|_{\psi_m(b), a_0} |x|_{a_0} dt$$

$$|_{\psi_m(b), a_0} |x|_{a_0} dt \leq K_{\psi_m(b)} |x|_{a_0} \int_0^1 |L(tx) - T_n(tx)|_{\psi_{m+1}(b)} dt \leq M_b$$

$$\bar{K}_b^{n+1} \frac{|x|_{a_0}^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Făcînd $m = 0$ rezultă $|L(x) - T_n(x)|_b \leq M_b \bar{K}_b^n \frac{|x|_{a_0}^{n+1}}{(n+1)!}$ deci avem $L(x) \equiv T(x)$.

Să demonstrăm că

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \left| \frac{T_n(x+sh) - T_n(x)}{s} - f(x, T(x)) \right|_b = 0.$$

Conform evaluărilor din lema 2, $\frac{T_n(x+sh) - T_n(x)}{s} = \int_0^1 S_n(x+\tau sh) h d\tau$ cu $S_n(x) = f(x, T_{n+1}(x))$.

$$\begin{aligned} \text{Deci } & \left| \int_0^1 f(x+\tau sh, T_{n-1}(x+\tau sh)) h d\tau - f(x, T(x)) h d\tau \right|_b \leq \left| \int_0^1 [f(x+ \right. \\ & + \tau sh, T_{n-1}(x+\tau sh)) - f(x+\tau sh, T(x+\tau sh))] h \tau \left|_b + \left| \int_0^1 f(x+ \right. \\ & \left. \tau sh, T(x+\tau sh)) h d\tau - f(x, T(x)) h \right|_b \leq K_b |h|_{a_0} \int_0^1 |T_{n-1}(x+\tau sh) - \\ & - T(x+\tau sh)|_{\psi(b)} d\tau + \left| \int_0^1 f(x+\tau sh, T(x+\tau sh)) h d\tau - f(x, T(x)) h \right|_b. \end{aligned}$$

Aplicînd convergența uniformă și lema 1 cu $R = T$ găsim că limita este 0.

Trecînd la limită întîi în raport cu n și apoi cu s , rezultă $T'(x) = f(x, T(x))$.

Observația 1. Putem rezolva (1) cu condiția $T(x_0) = y_0$ prin schimbarea de variabile $x - x_0 = u$, $y - y_0 = v$.

Observația 2. Putem obține ca un caz particular teorema pentru spații Fréchet sau Banach. Acest ultim caz a fost studiat de H.H. Keller lucrînd cu diferențiala Fréchet.

Observația 3. Dacă presupunem că f are proprietatea: $f(*, *) : V \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ este continuă, atunci soluția ecuației (1) va fi diferențiabilă. Fréchet (renunțăm în schimb la 3).

În adevăr, în acest caz există $\varphi : B \rightarrow A$ și $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ și dacă $(x', y') \in U(x, y)$ atunci $|f(x', y') - f(x, y)|_{b_{\varphi(\varphi)}} < \varepsilon$.

Se poate demonstra ușor, că dacă presupunem operația R din lema 1 continuă, operațiile S și T din lema 2 vor fi continue și $S(x) \in \mathcal{L}_{\varphi}(X, Y)$ (continuitate de la X la $\mathcal{L}_{\varphi}(X, Y)$).

Deducem că T_n vor fi continue și de asemenea T și T' . Se știe că dacă X și Y sînt reale T va fi și diferențiabilă Fréchet și $dT(x; h) = \delta T[x; h]$ [3].

În orice caz conform lemei 2 avem

$$T(x+h) - T(x) = \int_0^1 S(x+th) h \, dt \text{ cu } S(x) = f(x, T(x)).$$

$$\|T(x+h) - T(x) - f(x, T(x)) h\|_b = \left\| \int_0^1 [S(x+th) - S(x)] h \, dt \right\|_b \leq$$

$$\leq \|h\|_{\varphi(b)} \int_0^1 \|S(x+th) - S(x)\|_{l, \varphi(b)} \, dt.$$

$$\text{Deci } \lim_{\|h\|_{\varphi(b)} \rightarrow 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - f(x, T(x)) h\|}{\|h\|_{\varphi_1(b)}} = 0 \text{ dacă alegem } \varphi_1(b) \gg$$

$$\gg \varphi(b) \text{ și } \varphi_1(b) \gg a'(b), \text{ și } \lim_{\|h\|_{a'(b)} \rightarrow 0} S(x+th) = S(x).$$

$$\text{Deci } \delta T(x; h) = \delta T[x; h].$$

BIBLIOGRAFIE

1. H. H. Keller: Ueber die Differentialgleichung erster ordnung in normierten linearen Räumen. Rend. Circ. Mat. Palermo 1959.
2. G. Marinescu: Spații vectoriale normate, Ed. Acad. R.P.R. 1956.
3. G. Marinescu: Spații vectoriale topologice și pseudotopologice, Ed. Academiei R.P.R. 1959.

ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДИФФЕРЕНЦИАЛАМИ В ЛОКАЛЬНО-ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть X и Y — два локально-выпуклых пространства и f — функция, определённая для $X \times Y$ со значениями в $L(x, y)$, которая удовлетворяет условиям I 1, 2, 3, 4.

Доказывается, что уравнения $T'(x) = f[x, T(x)]$ имеют одно решение $T: U \rightarrow Y$, так что выполняется условие $T(0) = 0$.

Здесь через T' обозначена производная функции T , а U — окрестность нуля в X .

A THEOREM OF EXISTENCE AND UNICITY FOR EQUATIONS WITH DIFFERENTIALS IN LOCALLY CONVEX SPACES

ABSTRACT

Let X and Y be two locally convex spaces and f a mapping of $X \times Y$ into $L(X, Y)$, verifying the conditions I 1, 2, 3, 4. It is proved that the equation $T'(x) = f[x, T(x)]$ has a solution $T: U \rightarrow Y$ and only one.

CLASE DE ACOPERIRI RIEMANNIENE, I *

CABIRIA ANDREIAN CAZACU

Noțiunea de suprafață riemanniană — introdusă de B. Riemann în memoriile sale deschizătoare de drumuri din 1851 și 1857 — a fost formulată riguros de H. Weyl (1913) și T. Radó (1925) în noțiunea de suprafață riemanniană abstractă. De mare importanță în foarte multe probleme de teoria funcțiilor analitice, această noțiune nu cuprinde însă întreaga bogăție a conceptului inițial al lui Riemann : asociere a unei suprafețe cu un mod de acoperire, ei organizează doar suprafața cu o structură conformă. Lăsînd de o parte orice element legat de acoperire, ea nu se poate aplica în cercetările relative la foi și puncte de ramificație. Cu ajutorul noțiunii fundamentale de transformare interioară, prof. S. Stoilow a dat în 1935—36 definiția și caracterizarea topologică a suprafețelor riemanniene de acoperire, creînd astfel un nou și puternic instrument de cercetare. O suprafață riemanniană de acoperire sau — în terminologia folosită astăzi curent — o acoperire riemanniană este după S. Stoilow o acoperire a sferei sau a unei suprafețe orientabile și triangulabile S printr-o suprafață ¹ V după o transformare interioară T a lui V în S . Ea se notează S_V^T , [1], p. 31 și 119. Pe baza acestei noțiuni, paralel cu problema clasificării suprafețelor riemanniene (abstracte) s-a ridicat și problema clasificării acoperirilor riemanniene. Importante clase de acoperiri riemanniene au fost studiate de R. Nevanlinna [2], L.V. Ahlfors [3], S. Stoilow [4] — [11], L.I. Volkovskii [12], M. Heins [13], [14] și mulți alții ². Toate aceste cercetări, ca și cele pe care le-am dezvoltat, începînd din 1952, asupra acoperirilor riemanniene normal exhaustibile și apoi asupra celor parțial regulat sau regulat exhaustibile [19] — [31] prezintă anumite trăsături comune. Am dedus astfel următorul *criteriu general de clasificare al acoperirilor riemanniene*, [32] : a defini clasele de acoperiri riemanniene deschise după proprietățile (topologice sau metrice) ale unei exhaustiuni.

* Lucrarea de față constituie rezumatul primei părți a tezei prezentate în iunie 1964, la Universitatea din București pentru obținerea titlului de doctor în științele matematice. Partea II va apare în numărul următor al revistei.

¹ Vom numi suprafață sau varietate topologică 2-dimensională, un spațiu Hausdorff, conex, local euclidian 2-dimensional.

² A se vedea bibliografie în monografiile [15]—[18].

Fie V_k un şir de suprafeţe bordate (compacte sau nu), formînd o exhaustiune a suprafeţei $V : V_k \subset \overset{\circ}{V}_{k+1}$ şi $\bigcup_k V_k = V$ ($k = 1, 2, \dots$). Acoperirile $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ formează o exhaustiune a lui S_T^V . Diferitele clase de acoperiri vor fi caracterizate prin anumite proprietăţi ale lui $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$. Astfel am distins *clase P* pentru care V_k sînt compacte (domenii poliedrice), *clase A* în care $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ are un număr finit de puncte de ramificare algebrice, *clase W* în care $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ are un număr finit de ramificări algebrice sau logaritmice, clase în care acoperirea $T(\overset{\circ}{V}_k)_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ este local topologică (fără frontieră), sau prezintă una din proprietăţile *I*, *Bl*, etc.

Un rol important îl joacă în această clasificare mulţimile γ_k din S , pe care se proiectează la fiecare etapă k a exhaustiunii frontiera relativă Γ_k a lui V_k . Din proprietăţile mulţimilor γ_k se obţin numeroase consecinţe relative la acoperirea considerată S_T^V .

În această lucrare vom prezenta o teorie generală a claselor *P*, ceea ce nu constituie o limitare dacă ţinem seama de faptul că orice suprafaţă riemanniană V admite o exhaustiune prin suprafeţe bordate compacte (domenii poliedrice) V_k , limitate chiar de un număr finit de curbe Jordan analitice şi prin urmare, orice acoperire riemanniană S_T^V prezintă o exhaustiune $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ de clasă *P*¹.

Studiul claselor *P* constituie deci un instrument de investigaţie al acoperirilor riemanniene cu cîmp de aplicare extrem de larg, orice propoziţie demonstrată pentru această clasă avînd un caracter general. Adăugînd condiţii convenabile asupra mulţimilor γ_k şi acoperirii $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ se obţin pe această cale toate clasele de acoperiri importante. Clasele *A*, *W*, etc. se încadrează de asemenea în această teorie în modul următor: Dacă o acoperire riemanniană S_T^V are o exhaustiune arbitrară $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ fiecare $\overset{\circ}{V}_k$ e o suprafaţă riemanniană ce admite o exhaustiune cu domenii poliedrice V_{kj} ; alegînd indicii j_k astfel încît $\overset{\circ}{V}_{kj_k} \subset \overset{\circ}{V}_{k+1j_{k+1}}$, $S_T^{\overset{\circ}{V}_{kj_k}}$ constituie o exhaustiune *P* a lui S_T^V .

Capitolul I al acestei lucrări cuprinde definiţii şi proprietăţi caracteristice acoperirilor poliedrale (realizate cu domenii poliedrice), pe care le numim pe scurt *acoperiri P*. Clasa acoperirilor exhaustibile poliedral, pe care o numim *clasa P*, şi diferite subclase ale ei formează capitolul II. În capitolul III sînt prezentate proprietăţile locale ale acoperirilor de clasă *P* şi se studiază unele mulţimi limită. Capitolele IV şi V se încadrează în teoria repartiţiei valorilor dezvoltată cu metode topologice în sensul lui S. Stoilow resp. metrico-topologice după L. V. Ahlfors. Capitolul VI tratează problema tipului. În întreaga lucrare, exemplele au fost alese din clasa acoperirilor parţial regulat exhaustibile, clasă pe care am introdus-o în 1955 [21], [23] — [26], [28], [31].

¹ Evident, există infinit de multe exhaustiuni de acest fel.

CAPITOLUL I

ACOPERIRI POLIEDRALE P

§ 1. Definiții. Caracterizarea acoperirilor P

1.1. Creind teoria topologică a funcțiilor analitice, prof. S. Stoilow a introdus noțiuni fundamentale, care își găsesc aplicații nu numai în studiul acoperirilor riemanniene ci în topologie, în teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe, etc. Dintre acestea, ne vom baza pe noțiunile de transformare interioară, regiune sau domeniu maxim, domeniu normal, acoperire totală și acoperire parțial regulată [1], cap. V și VI.

O transformare interioară T a unei suprafețe V în suprafața triangulabilă și orientabilă S este o aplicație continuă, deschisă și 0 — dimensională a lui V în S . Se știe că existența unei transformări interioare T , deci a acoperirii riemanniene S_T^V , implică triangulabilitatea și orientabilitatea lui V , [1], cap. III, III și cap. V, III.

Fie d o regiune sau domeniu fără frontieră interioară din S și a un punct din V cu $T(a)$ în d . Numim regiune maximă a lui d relativ la a , componenta conexă a lui $T^{-1}(d)$, care conține pe a și domeniu maxim¹. Închiderea unei regiuni maxime. Domeniile normale sînt domeniile maxime compacte [1] cap. V, III, p. 108.

Acoperiri totale, [1], cap. VI, II, p. 125.

Se spune că un șir de puncte dintr-un spațiu topologic tinde către frontiera acestui spațiu, dacă nu conține nici un subșir infinit, compact în spațiu.

Acoperirea riemanniană S_T^V este totală, dacă oricare ar fi șirul de puncte P_n din V , tinzînd către fr. V , șirul $T(P_n) = p_n$ din S tinde către fr. S .

Atunci $T(V) = S$ și oricărui punct p din S îi corespunde același număr finit de puncte în $T^{-1}(p)$ din V socotite cu ordinul lor de multiplimitate: gradul acoperirii totale sau numărul foilor n .

Dacă V și S au caracteristici finite ρ resp. ρ_0 , atunci formula lui Hurwitz [1], cap. VI, III, p. 133, dă ordinul total de ramificare algebrică al acoperirii

$$r = \rho - n\rho_0. \quad (1.1)$$

Acoperiri parțial regulate, [1], cap. VI, IV, p. 135.

Acoperirea riemanniană S_T^V este parțial regulată dacă

(β_1) Orice șir de puncte din V , care tinde la fr. V , are ca imagine un șir de puncte din S , tinzînd la fr. S sau la un număr finit de curbe simple închise γ , disjuncte două câte două, fiecare frontieră comună la două regiuni disjuncte ale mulțimii $S - \gamma$ și

(β_2) $T^{-1}(\gamma)$ e compactă în V sau vidă.

¹ Domeniul maxim a lui d relativ la a se notează (d, a) .

Fiecare din regiunile δ_i în care se descompune $S - \gamma$ este acoperită total de V sau nu este acoperită de loc. Fie n_i numărul foilor lui V peste δ_i , ρ_i caracteristica lui δ_i , ρ caracteristica lui V (presupuse finite) și r ordinul total de ramificare algebrică al acoperirii S_T^V . Formula prof. S. Stoilow [1], cap. VI, IV, p. 138, ne dă

$$i_r = \rho - \sum_i n_i \rho_i. \quad (1.2)$$

1.2. În cele ce urmează vom lărgi noțiunea de acoperire parțial regulată reținând doar proprietatea (β_1) sub forma extinsă următoare:

Acoperirea riemanniană S_T^V are proprietatea (β_1) dacă imaginea oricărui șir de puncte din V , care tinde la fr. V , tinde la fr. S sau la o mulțime închisă γ din S , $\gamma \neq S^1$.

Relativ la o acoperire S_T^V cu proprietatea (β_1) față de γ , amintim următoarele propoziții, pe care le-am demonstrat în lucrarea [27]:

P_1 . Orice regiune δ din $S - \gamma$ este acoperită total de fiecare regiune maximă a sa Δ din V .

Orice componentă conexă a lui $V - T^{-1}(\gamma)$ este regiune maximă pentru una din componentele conexe ale lui $S - \gamma$.

P_2 . Dacă $a \in T(V) - \gamma$, atunci $T^{-1}(a)$ cuprinde un număr finit de puncte din V .

Din propozițiile P_1 și P_2 rezultă consecința:

C_1 . Fiecărei componente conexe δ a mulțimii $S - \gamma$ îi corespunde un număr finit n , gradul acoperirii sau numărul foilor lui V peste δ .

P_3 . Dacă $a \in T(V) \cap \text{fr. } \gamma$, preimagea sa $T^{-1}(a)$ constă de asemenea dintr-un număr finit de puncte din V .

Mai precis, fie δ_i componentele conexe din $S - \gamma$, pe frontiera cărora se găsește a și $n = \min n_i$, unde n_i este gradul acoperirii lui V peste δ_i . Atunci $T^{-1}(a)$ constă din cel mult n puncte.

C_2 . Dacă acoperirea S_T^V verifică proprietatea (β_1) relativ la o mulțime frontieră γ din S , preimagea fiecărui punct din $T(V)$ este formată dintr-un număr finit de puncte din V .

C_3 . Dacă S_T^V satisface (β_1) relativ la mulțimea frontieră γ , iar $S - \gamma$ se descompune într-un număr finit de regiuni δ_i , (sau numai un număr finit de regiuni δ_i din $S - \gamma$ sînt acoperite de V), oricare ar fi a din S , mulțimea $T^{-1}(a)$ e formată din cel mult N puncte din V , unde $N = \max n_i$.

1.3. Fie din nou γ o mulțime închisă arbitrară din S , $\gamma \neq S$. Să notăm cu α și α' elementele frontierei ideale a lui V resp. S , [1], p. 85. În $\bar{S} = S \cup \text{fr. } S^2$ mulțimea închisă $\gamma \cup \text{fr. } S$ se descompune în componente conexe σ . Spațiul $\bar{S}$ fiind compact, două componente distincte σ_1 și σ_2 se pot totdeauna separa printr-un compact din $S - \gamma$.

P_4 . Dacă P_n e un șir de puncte din V , tinzînd către un element frontieră α a lui V , șirul $p_n = T(P_n)$ tinde către o componentă bine determinată σ a mulțimii $\gamma \cup \text{fr. } S$.

¹ Evident, proprietatea (β_1) este verificată atunci pentru orice altă mulțime închisă $\gamma_1 \supset \gamma$.

² Am notat cu $\bar{S}$ (resp. $\bar{V}$) spațiul topologic obținut după H. Freudenthal, prin completarea lui S (resp. V) cu elementele sale frontieră [33], I, § 7, p. 26.

C_4 . Propoziția P_4 ne permite să stabilim o corespondență univocă de la mulțimea $\{\alpha\}$ a elementelor frontieră a lui V la mulțimea $\{\sigma\}$ a componentelor conexe din care e formată fr. $S \cup \gamma$ pe $\bar{S}$.

1.4. Vom analiza acum cazul important în aplicații, în care γ e format dintr-un număr finit de curbe jordaniane, disjuncte două câte două și un număr finit de arce simple¹: fiecare arc jordanian pe S sau partea din S a unui arc jordanian de pe $\bar{S}$, a cărui intersecție cu fr. S este alcătuită din una sau ambele extremități. Admitem și cazul când cele două extremități ale unui arc coincid. Intersecția unui arc din γ cu alt arc sau curbă jordaniană din γ conține cel mult extremitățile arcului. Numim *noduri* extremitățile arcelor din γ cuprinse în S^2 și notăm cu $\mathcal{N}$ mulțimea lor.

Cum arcele din γ nu-s totdeauna compacte în S , nu putem cere ca acoperirea S_T^V să verifice (β_2) , ci vom înlocui această condiție cu *proprietatea locală* ($L\beta_2$):

Fie p un punct din γ și v o vecinătate a sa. Notăm cu k_{pv} componenta conexă ce conține p a mulțimii $\gamma \cap v$; k_{pv} este formată din p și pentru fiecare arc de pe γ ce trece prin p , din subarcul deschis cuprins între p și primul său punct de intersecție cu fr. v .

Spunem că punctul p din γ are *proprietatea* ($L\beta_2$) dacă există o vecinătate v' a sa, astfel încît preimaginea mulțimii $k_{pv'}$, să aibă componentele conexe relativ compacte în V sau să fie mulțimea vidă.

P_5 . Dacă p are proprietatea ($L\beta_2$) și $T^{-1}(p) \neq \emptyset$, fiecare componentă conexă a mulțimii $T^{-1}(k_{pv'})$ conține cel puțin un punct din $T^{-1}(p)$, deci $T^{-1}(k_{pv'})$ are un număr finit de componente conexe.

C_5 . Dacă γ e compact în S , proprietatea (β_2) este echivalentă cu ($L\beta_2$) pentru toate punctele lui γ , căci γ se poate acoperi cu un număr finit de mulțimi $k_{pv'}$.

Numim *excepționale* punctele din γ , care nu au proprietatea ($L\beta_2$). Mulțimea E a acestor puncte este *închisă* în S , deoarece dacă p are proprietatea ($L\beta_2$), orice $q \in k_{pv'}$, are aceeași proprietate. În mod analog, putem defini pentru orice submulțimi $\gamma \subset \gamma$ cu aceleași proprietăți ca și γ , în particular pentru curbe jordaniane sau arce din γ , puncte *excepționale relativ* la γ^* , înlocuind γ cu γ^* . Fie E_{γ^*} mulțimea acestor puncte. Evident $E = \bigcup_{\gamma^*} E_{\gamma^*}$ reuniunea fiind extinsă asupra tuturor curbelor sau arcelor γ^* din γ .

Observare. Dacă $p \in E$, există o vecinătate a sa w , astfel încît

1) regiunile maxime ale ei relativ la puncte din $T^{-1}(p)$ să fie relativ compacte în V , și

2) $T^{-1}(k_{pw})$ să aibă componentele conexe relativ compacte în V .

¹ Convenim să numim arc simplu închis (arc jordanian) imaginea topologică a unui segment, arc simplu deschis (resp. deschis la unul din capete) imaginea topologică a unui interval deschis (resp. deschis la o extremitate, închis la cealaltă) și arc simplu unul oarecare din aceste arce.

² Evident fără a restringe generalitatea putem înlocui prin înlocuire cu o curbă jordaniană sau compunerea drumurilor, nodurile care sînt numai extremitate și origină pentru același arc sau extremitate comună pentru două arce, fără ca să mai aparțină altor arce sau curbe din γ .

P_6 . Orice subarc $l \subset \gamma - E$ este acoperit total de fiecare componentă conexă a preimaginii sale: fiecare acoperă orice punct din l cu același număr de puncte, iar V acopere l cu un număr s de foi.

P_7 . Când transportăm un arc simplu l de pe γ pe V , dacă L este un drum continuu astfel obținut, el acopere total l sau tinde către fr. V (și anume către un element bine determinat din fr. V). În ultimul caz, există un punct $r \in l \cap E$ astfel încît pentru orice șir $R_n \in L$, tinzînd către fr. V șirul $r_n = T(R_n)$ să tindă către r .

P_8 . Dacă $p \subset E$, pentru fiecare vecinătate a sa v , există cel puțin un arc simplu deschis la o extremitate, necompact L din $T^{-1}(\gamma \cap v)$, astfel încît cînd punctul $\tilde{P}$ din L tinde către fr. V , proiecția sa $\tilde{p}$ tinde către un punct excepțional bine determinat $r \in \gamma \cap v$. (Eventual $r = p$).

P_9 . Fie L un arc simplu din $T^{-1}(\gamma)$ imaginea topologică a intervalului $0 \leq t < 1$. Atunci atît L cît și drumul continuu $T(L)$ tind către un punct bine determinat din $\bar{V}$ respectiv $\bar{S}$ cînd t tinde către 1.

Pe $T^{-1}(\gamma)$ există un număr finit de arce L simple, închise, disjuncte două cîte două, care nu se mai pot prelungi pe $T^{-1}(\gamma)$ în una din extremitățile lor $Q \in V$.

Un punct este excepțional pentru un arc simplu de pe γ cu o extremitate în acel punct, dacă și numai dacă numărul punctelor din preimaginea sa este mai mic decît numărul foilor ce acoperă arcul.

1.5. P_{10} . Fie S_T^V o acoperire cu proprietatea (β_1) relativ la o mulțime γ de tipul considerat la nr. 1.4. Dacă V are caracteristică finită, există un număr finit de puncte excepționale pe γ și S_T^V are un număr finit de puncte de ramificare¹.

Se știe că în cazul acoperirilor parțial regulate S_T^V , dacă S are ordin de conexiune finit, iar V gen finit, atunci și V are ordin de conexiune finit [1], p. 129. Această proprietate nu se păstrează dacă renunțăm la condiția (β_2) , [27], p. 62, A_3 ; totuși admitînd numai un număr finit de puncte în care $(L\beta_2)$ nu este îndeplinită, obținem propoziția:

P_{11} . Fie S_T^V o acoperire cu proprietățile (β_1) relativ la o mulțime γ de tipul considerat în 1.4 și $(L\beta_2)$ exceptînd un număr finit de puncte din γ . Dacă S are caracteristică finită, iar V gen finit, atunci S_T^V are un număr finit de puncte de ramificare și V un număr finit de elemente frontieră.

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{Q}$ mulțimea punctelor de ramificare.

1.6. Din rezultatele acestui paragraf, deducem că o suprafață V de caracteristică finită, care realizează o acoperire riemanniană S_T^V cu proprietatea (β_1) față de o mulțime de curbe γ de tipul considerat la nr. 1.4, este omeomorfă cu interiorul unei suprafețe riemanniene bordate compacte (domeniu poliedric) W . Reciproc, dacă W e un domeniu poliedric cu frontiera formată dintr-un număr finit de arce analitice pe suprafața riemanniană R și T o aplicație analitică: $R \rightarrow S$, acoperirea S_T^V satisface condiția (β_1) față de proiecția bordului lui W prin T . Obținem deci următoarea definiție:

¹) Rezultă de asemeni că $T(V)$ are caracteristică finită.

Se numește *acoperire poliedrală sau acoperire P o acoperire riemanniană S_T^V , în care V e o suprafață de caracteristică finită și S_T^V are proprietatea (β_1) — față de o mulțime de curbe γ din S , de tipul considerat la nr. 1.4 (orice șir de puncte din V , care tinde la fr. V , se proiectează într-un șir de puncte din S tinzând la fr. S sau la γ).*

Remarcăm următoarea proprietate locală a acoperirii poliedrale S_T^V în vecinătatea unui punct $a \in \gamma$; fie v o vecinătate a lui a limitată de o curbă jordaniană c , suficient de restrînsă ca în v să nu se găsească nici un punct din $E \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{Q}$ diferit de a și ca $\bar{v} \cap \gamma$ să fie formată din $N (\geq 1)$ arce jordaniane cu o extremitate în a și cealaltă pe c , al căror unic punct comun este extremitatea din a . Alegem v astfel încît componentele conexe necompacte $\mathfrak{V}$ din $T^{-1}(v)$ să nu conțină puncte din $T^{-1}(a)$ conform Observării de la nr. 1.4.

P_{12} . $\mathfrak{V}$ este simplu conex separat de $V - \mathfrak{V}$ printr-o transversală $\mathcal{C}$ sau dublu conex cu frontiera formată dintr-un singur element din fr. V și o curbă jordaniană $\mathcal{C}$ de pe V .

§ 2. Generalizarea formulei Hurwitz Stoilow

1.7. Pentru a putea trata diferite probleme privind teoria repartitiei valorilor sau clasificarea suprafețelor riemanniene, prezentăm în acest paragraf o formulă asupra ramificării acoperirilor poliedrale, care constituie generalizarea formulelor date de Hurwitz pentru acoperirile totale (1.1) și de Stoilow pentru acoperirile parțial regulate (1.2).

Fie S_T^V o acoperire P . Conform P_{10} , mulțimile $\mathcal{N}$, E și $\mathcal{Q}$ sînt finite. Notăm cu γ' o mulțime de curbe jordaniane de pe γ , disjuncte două câte două, conținînd toate curbele jordaniane din $\gamma - (E \cup \mathcal{N})$ și numim *circuite* curbele din γ' . Mulțimea $E_{\gamma'}$ a punctelor excepționale relativ la aceste circuite, dacă există, descompune unele sau chiar toate circuitele în subarce simple. De asemeni mulțimea $E \cup \mathcal{N}$ descompune $\gamma - \gamma'$ în subarce simple. Notăm mulțimea tuturor acestor subarce cu γ'' și le numim convențional *transversale*. O transversală poate avea în comun cu alta sau cu un circuit cel mult extremitățile; ea este fie un arc jordanian pe S , fie un arc simplu deschis la una sau ambele extremități, care sînt elemente din fr. S .

Fie δ_i regiunile în care se descompune $S - \gamma$ și peste care V are $n_i \neq 0$ foi, ρ_i caracteristica lui δ_i , s_j numărul foilor lui V peste transversala γ_j'' din γ'' , (conform P_6) și v_k numărul punctelor din V ce se proiectează peste un punct $p_k \in E_{\gamma'} \cup [(E \cup \mathcal{N}) - \gamma']$, socotite cu ordinul lor de multiplicitate.

Teorema T_1 : Dacă acoperirea riemanniană S_T^V are proprietatea (β_1) relativ la mulțimea γ (nr. 1.4) și dacă V are caracteristică finită, ordinul total de ramificare al acoperirii este

$$r = \rho - \sum_i n_i \rho_i - \sum_j s_j + \sum_k v_k \quad (1.3)$$

unde ρ este caracteristica lui V , iar ρ_i , n_i , s_j și v_k au semnificațiile de mai sus: sumele fiind extinse la toate regiunile δ_i din $(S - \gamma) \cap T(V)$, transversalele γ_j'' din γ'' respectiv punctele $p_k \in E_{\gamma'} \cup [(E \cup \mathcal{N}) - \gamma']$.

Dacă γ constă numai din circuite și nu există puncte excepționale, (1.3) devine formula (1.2) stabilită de S. Stoilow.

Pentru a demonstra (1.3) folosim formula de adunare a caracteristicilor a lui L.V. Ahlfors [3] și propozițiile paragrafului precedent [27].

În formula (1.3) putem considera toate punctele $p_k \in E \cup (\mathcal{H} - \gamma')$, dar trebuie să socotim și transversalele noi ce apar în acest mod pe unele circuite γ' . Alegerea circuitelor γ' poate fi efectuată în general în moduri diferite. Putem alege un sistem maximal de circuite, pe care să nu existe puncte excepționale relativ la ele. Arcele și celelalte curbe jordanice din γ se descompun în transversale. În acest caz $\gamma' \cap \gamma'' = 0$.

Dacă în teorema T_1 adăugăm și ipoteza ca S să aibă caracteristică finită putem considera în (1.3) toate regiunile din $S - \gamma$, fiecare având caracteristică finită. Evident numai cele din $T(V)$ vor aduce însă o contribuție efectivă.

Teorema T_1 dă o generalizare a formulei de adunare a caracteristicilor [3]: Luind $V = S$, acoperirea S_T^V , unde T este aplicația identică și γ un sistem de curbe de tipul considerat la nr. 1.4, formula (1.3) din T_1 devine

$$0 = \rho - \sum_i \rho_i - N(\gamma_i'') + N(p_k) \quad (1.4)$$

unde $N(\gamma_i'')$ și $N(p_k)$ este numărul transversalelor γ_i'' respectiv punctelor p_k ¹. Vom numi (1.4) *formula configurației* (S, γ). Evident ea depinde de alegerea circuitelor γ' .

CAPITOLUL II

ACOPERIRI DE CLASA P

§ 1. Definiție

2.1. O acoperire riemanniană S_T^V se numește *acoperire de clasă P* (sau poliedral exhaustibilă, exhaustibilă P) dacă pe V se dă un șir de domenii poliedrice V_k ($k = 1, 2, \dots$) cu proprietățile:

- 1) $V_k \subset \overset{\circ}{V}_{k+1}$,
- 2) $\bigcup_k V_k = V$,

- 3) $S_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ formează o acoperire poliedrală (I, 1.6).

După cum am remarcat în cap. I, condiția 3) din definiția de mai sus este satisfăcută, dacă S fiind suprafață riemanniană, iar V organizat ca suprafață riemanniană cu ajutorul lui T , fr. $V_k = \Gamma_k$ este formată din curbe de arce analitice, deoarece în acest caz $\gamma_k = T(\Gamma_k)$ are proprietățile cerute în cap. I, 1.4.

¹ În această lucrare vom nota ades cu $N(e)$ numărul elementelor e ale unei mulțimi.

2.2. Orice acoperire riemanniană, admite exhaustiuni P și chiar exhaustiuni în care curbele din Γ_k constau dintr-un număr finit de arce analitice, iar $V - V_k$ se descompune în componente conexe necompacte, [33], p. 25. Importanța cercetării clasei P constă tocmai în această generalitate: metodele și rezultatele obținute pentru exhaustiunile P pot fi aplicate tuturor claselor de acoperiri riemanniene. Pe această cale se aprofundează acoperirile definite cu ajutorul unui complex de segmente sau prin alte proprietăți ale ramificării în sensul lui A. Speiser, R. Nevanlinna, G. Elfving, L.V. Ahlfors, Z. Kobayshi, E. Ullrich, H. Wittieh, L.I. Volkovski, P. Laasonen, Le Van Thiem, F. Huckemann, H. Künzi, H. Schubart, A.A. Goldberg, D.B. Potiagailo, etc.¹

După observarea din introducerea acestei lucrări, dacă inițial acoperirea S_T^V este definită printr-o exhaustiune care nu este poliedrală V_k , folosirea unei exhaustiuni auxiliare P , construită aproximînd poliedral fiecare suprafață bordată V_k , constituie un mijloc deosebit de eficace de studiu. Putem astfel aprofunda suprafețele de clasă A , W , Λ a lui L.I. Volkovski sau cercetările asupra ramificării, întreprinse cu metoda lui M. Morse de F.D. Gahov, Iu. M. Krikunov, T.M. Kolomițeva, I.M. Melnic, A.I. Povolotkii [30], [32].

Rezultatele relative la clasa P se aplică atît acoperirilor riemanniene cu exhaustiuni definite pur topologic: acoperirile normal exhaustibile ale lui S. Stoilow [6], acoperirile E -cvasi-normal exhaustibile a lui T. Kuroda [34], acoperirile parțial regulat exhaustibile [22], [26] etc., cît și celor definite prin condiții metrico-topologice: acoperirile regulat exhaustibile ale lui L.V. Ahlfors [3], acoperirile cu puncte de ramificare care se apropie ale lui L.I. Volkovskii, [12] etc. Ipoteze metrice impuse curbelor γ_k permit să se deducă numeroase rezultate asupra acoperirii S_T^V , [25], [26], [31].

Se știe că în definirea claselor O se folosesc exhaustiuni poliedrale ale suprafețelor riemanniene. Pe de o parte suprafețe riemanniene de diferite clase conforme realizează acoperiri riemanniene cu proprietăți bine determinate, pe de altă parte, invers, se formulează criterii de tip pe baza proprietăților acoperirii. În acest sens, studiul claselor P aduce o contribuție remarcabilă și în problema clasificării conforme a suprafețelor riemanniene.

§ 2. Clasele de acoperiri exhaustibile P

2.3. Prezentăm în acest paragraf clasele de acoperiri riemanniene poliedral exhaustibile, care vor fi folosite ca exemple în cuprinsul lucrării.

1°. Acoperiri normal exhaustibile

O acoperire riemanniană S se numește normal exhaustibilă, dacă V admite o exhaustiune cu domenii poliedrice V_k , astfel încît $T(\overset{\circ}{V}_k)_T^{\overset{\circ}{V}_k}$ să fie o acoperire totală 1.1.

¹ A se vedea bibliografie în monografiile [2], [12], [16].

Introduse de S. Stoilow [5], [6] și studiate de G.T. Whyburn [35], ele constituie o generalizare topologică a acoperirilor totale realizate de suprafețe riemanniene închise și prezintă numeroase proprietăți remarcabile [19], [21] — [24]. Această clasă cuprinde acoperirile generate de funcții întregi de ordin $< 1/2$, (care satisfac teorema lui Wiman), sau de funcția Luzin-Privalov [6]; alte exemple bazate pe rezultatele lui Shah, Volkoviskii, Davîdov, Seidel, precum și pe două propoziții generale (teorema extragerii [19] și o teoremă privind funcțiile întregi ¹) sînt dezvoltate în [36].

2°. Acoperiri E -cvasinormal exhaustibile

Fie E o mulțime închisă din S , diferită de S și D_j ($j = 1, 2, \dots$) componentele conexe ale mulțimii $S - E$. Numim E -cvasi-normal exhaustibilă o acoperire riemanniană S_T^V cu următoarea proprietate: există exhaustiunile cu domenii poliedrice V_k a lui V și D_{jk} a lui D_j ($j = 1, 2, \dots$) cu frontiere Γ_k respectiv γ_{jk} , formate fiecare dintr-un număr finit de curbe jordaniene disjuncte două câte două și astfel încît $T(\Gamma_k) \subset \gamma_k = \bigcup_j \gamma_{jk}$, [26].

Această clasă, pe care am definit-o și studiat-o în lucrările [25], [26] și [31], generalizează acoperirile E -cvasi-normal exhaustibile a lui T. Kuroda pentru care $S = (w)$ și $S - E$ se reduce la un singur domeniu D . Ea cuprinde: acoperirile normal exhaustibile, (care se obțin luînd E -mulțime lacunară și deci $D = T(V)$), suprafețele A_∞ ale lui L.I. Volkovski (pentru $S = (w)$ și $E = \{\infty\}$) [12], suprafețele lui Osseman [37]. Exemple de funcții meromorfe ce generează acoperiri E -cvasinormal exhaustibile se obțin cu ajutorul generalizării date de A.A. Goldberg teoremei lui Wiman [25].

3°. Acoperiri parțial regulat exhaustibile

Acoperirile E -cvasinormal exhaustibile se încadrează în clasa generală a acoperirilor parțial regulat exhaustibile, pe care am definit-o în 1955 [22] — [24], [36] și am studiat-o în lucrările [26] și [31]:

Acoperirea riemanniană S_T^V se numește *parțial regulat exhaustibilă* dacă admite o exhaustiune poliedrală astfel încît acoperirea $S_T^{\hat{V}^k}$ să fie parțial regulată, 1.1.

Cu toate că acoperirile parțial regulat exhaustibile formează o clasă deosebit de vastă, ele prezintă numeroase proprietăți importante, obținute prin metoda exhaustiunilor poliedrale. În încheierea acestui paragraf vom stabili un criteriu de apartenență la clasa acoperirilor parțial regulat exhaustibile.

¹ Se obțin astfel acoperiri normal exhaustibile, corespunzînd la funcții întregi de orice ordin (finit sau nu).

4°. Acoperiri evasitotal exhaustibile

Acoperirile evasitotal exhaustibile, pe care le-am definit în lucrarea [31], constituie un analog topologic al acoperirilor regulat exhaustibile ale lui L.V. Ahlfors.

Fie S_T^V o acoperire poliedral exhaustibilă. Frontiera Γ_k a domeniului poliedric de exhaustiune V_k se proiectează pe mulțimea de curbe γ_k , care descompune S în domenii D_{jk} . Notăm cu n_{jk} numărul foilor lui $S_T^{\hat{V}_k}$ peste D_{jk} , cu n_k numărul foilor complete a lui $S_T^{\hat{V}_k}$ peste $T(\hat{V}_k)$ și cu $M_k = \max_j n_{jk}$. Numim acoperirea S_T^V evasitotal exhaustibilă în sens strict sau larg, dacă, uniform în raport cu indicii j pentru care $D_{jk} \subset T(\hat{V}_k)$, avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{n_k} = 1 \text{ resp. } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{jk}}{M_k} = 1$$

Evident o acoperire evasitotal exhaustibilă în sens strict este și evasitotal exhaustibilă în sens larg. Acoperirile normal exhaustibile constituie un exemplu de acoperiri evasitotal exhaustibile în sens strict. În cap. III vom da exemple de acoperiri evasitotal, dar nu normal exhaustibile, iar în cap. V, în care vom analiza și raportul între acoperirile evasitotal și cele regulat exhaustibile, vom construi acoperiri evasitotal exhaustibile în sens larg, dar nu strict.

Probleme de repartiția valorilor, care ne-au condus la definirea exhaustibilității evasitotale, pun în evidență și cazul acoperirilor exhaustibile în care anumite domenii din S sînt acoperite cu preferință (a se vedea cap. IV).

5°. Acoperiri complete

Numim acoperire completă o acoperire riemanniană S_T^V pentru care orice foaie se prelungește nelimitat peste S .

Prezentînd proprietăți remarcabile, aceste acoperiri au format obiectul unui mare număr de cercetări, amintite la punctul 2.2¹. În cap. III, vom da exemple de acoperiri complete, care nu sînt evasitotale sau E -evasinormal exhaustibile.

2.4. Amintim acum cîteva proprietăți ale acoperirilor parțial regulat exhaustibile pe care le-am demonstrat în lucrarea [26]:

Fie S_T^V o acoperire riemanniană arbitrară și W un domeniu poliedric de pe V , limitat de un număr finit de curbe jordaniane $\Gamma = \{\Gamma_j\}$, disjuncte două cîte două, astfel încît $S_T^{\hat{V}}$ să fie o acoperire parțial regulată, $T(\Gamma) = \gamma$ constînd dintr-un număr finit de curbe jordaniane $\gamma = \{\gamma_i\}$ disjuncte două cîte două, (așa cum vor fi în aplicațiile ce urmează domeniile V_k ale unei exhaustiuni parțial regulate). Se știe, 1.1., că $\hat{W} = T^{-1}(\gamma)$ constă

¹ Acoperirile lui S. Kobayshi, R. Nevanlinna, L. I. Volkovski, etc. A se vedea [2], [12] și [16].

dintr-un număr finit de domenii ce acopăr total proiecțiile lor, care sînt componente conexe ale mulțimii $S - \gamma$. Pentru fiecare j , $T(\Gamma_j) = \gamma_j$, astfel încît atunci cînd Γ_j este descrisă odată γ_j este descrisă de un număr finit de ori, mereu în același sens. Dacă pe Γ_j se află un punct de ramificare P de ordinul $k-1$ al acoperirii S_T^V , prin P trec k arce din $T^{-1}(\gamma_j)$, care împart vecinătatea lui P în $2k$ sectoare; domeniul W conține unul singur din aceste sectoare.

Stabilim următoarea propoziție auxiliară:

P_1 . Fiind dat un compact arbitrar K din $\tilde{W}$, există un domeniu poliedric $\tilde{W}$, cu proprietățile:

- 1) $\tilde{W}$ conține K în interior și este inclus în $\tilde{W}$;
- 2) $\tilde{W}$ este limitat de un număr finit de curbe jordaniane analitice $\tilde{\Gamma}$ disjuncte două câte două, pe care nu se află nici o ramificare a lui S_T^V și astfel încît $T(\tilde{\Gamma}) \cap T(\Gamma) = 0$;

3) $\tilde{W}$ acopere parțial regulat S .

P'_1 . Propoziția P_1 rămîne valabilă dacă admitem eventuale puncte multiple pentru curbele Γ în puncte de ramificare ale acoperirii S_T^V și dacă cerem ca $\tilde{\gamma} = T(\tilde{\Gamma})$ să nu intersecteze un compact oarecare x din $S - \gamma$.

Fie S_T^V o acoperire riemanniană parțial regulat exhaustibilă și V_k un șir de exhaustiune a lui V , format din domenii poliedrice, care acopăr parțial regulat S . Notăm cu $\Gamma_k = \{\Gamma_{jk}\}$ frontiera lui V și cu $\gamma_k = \{\gamma_{jk}\} = T(\Gamma_k)$.

T_1 . Din propoziția P_1 , rezultă că S_T^V admite întotdeauna o exhaustiune parțial regulată pentru care Γ_{jk} sînt curbe jordaniane analitice și nu trec prin nici un punct de ramificare.

Altă consecință a propoziției P'_1 este următorul criteriu:

T_2 . O acoperire riemanniană ce admite o exhaustiune prin domenii poliedrice V_k , a căror frontieră Γ_k se proiectează pe un număr finit de curbe jordaniane γ_k , disjuncte două câte două și satisfăcînd relația $\gamma_{k-1} \cap \gamma_k = 0$, ($k = 2, 3, \dots$) este parțial regulat exhaustibilă.

Din T_2 rezultă imediat consecința:

T_3 . O acoperire E-crasinormal exhaustibilă este parțial regulat exhaustibilă.

CAPITOLUL III

PROPRIETĂȚI DE ACOPERIRE

§ 1. Mulțimi limită

3.1. Fiecărei acoperiri poliedral exhaustibile S_T^V i se pot asocia relativ la exhaustiunea V_k considerată următoarele mulțimi închise:

$\mathcal{L}$ — mulțimea punctelor p din S , pentru care există șirurile de k_j de numere naturale și p_{k_j} de puncte din γ_{k_j} , astfel încît $p = \lim_{j \rightarrow \infty} p_{k_j}$,

$\mathcal{M}$ — mulțimea punctelor p din S , pentru care există un șir de puncte $p_k \in \gamma_k$ cu proprietatea $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$,

$\mathcal{A}$ — închiderea mulțimii valorilor asimptotice ale transformării T , și
 $\mathcal{R}$ — mulțimea limitelor șirurilor de proiecții de puncte de ramificare
 din S_T^F .

Mulțimile $\mathcal{L}$ și $\mathcal{M}$ pot varia cu exhaustiunea considerată. Evident

$$S \supset \mathcal{L} \supset \mathcal{M} \supset \mathcal{A} \supset 0. \quad (3.1)$$

Dacă V_i este un șir de exhaustiune poliedrală a lui V , orice subșir k_j determină o exhaustiune analogă $\tilde{V}_j = V_{k_j}$. Mulțimile $\tilde{\mathcal{L}}$ și $\tilde{\mathcal{M}}$ corespunzătoare verifică incluziunile

$$\mathcal{L} \supset \tilde{\mathcal{L}} \supset \tilde{\mathcal{M}} \supset \mathcal{M}. \quad (3.2)$$

Oricare din aceste incluziuni poate fi strictă sau nu după cum rezultă din exemplele $E_{1\alpha}$, $E_{1\beta}$, $E_{2\alpha}$, $E_{2\beta}$, $E_{2\gamma}$ din [26] p. 310 la care adăugăm și următorul exemplu:

E_3 . Să alegem pentru precizarea expunerii segmentele $s_k = [2k - 1, 2k]$ și curbele jordanene γ_k , astfel încît s_k să fie inclus în interiorul δ_k al lui γ_k , iar pentru $k \neq k'$, γ_k și $\gamma_{k'}$ să fie exterioare ($k = 1, 2, \dots$). Construim acoperirea riemanniană parțial regulat exhaustibilă S_T^F în modul următor:

V_1 se obține lipind la planul (w) , tăiat în lungul lui s_1 , $n^1 - 1$ foi peste δ_1 cu ramificări de ordinul $n^1 - 1$ peste 1 și 2. V_2 se deduce din V_1 prelungind cele $n^1 - 1$ foi necomplete peste γ_1 cu foi tăiate pe s_2 și racordînd la fiecare $n^2 - 1$ foi peste δ_2 cu ramificări de ordinul $n^2 - 1$ peste 3 și 4. V_2 are $n_2 = n^1$ foi complete și $t_2 = (n^1 - 1)(n^2 - 1)$ foi necomplete. V_k se deduce din V_{k-1} prelungind cele t_{k-1} foi peste γ_{k-1} cu foi tăiate pe s_k și racordînd la fiecare $n^k - 1$ foi necomplete peste δ_k , cu ramificări de ordinul $n^k - 1$ în punctele $2k - 1$ și $2k$. V_k are $n_k = n_{k-1} + t_{k-1}$ foi complete și $t_k = t_{k-1}(n^k - 1)$ foi incomplete.

Acoperirea S_T^F are $\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{A} = \mathcal{R} = \{\infty\}$.

Observarea O_1 . Dacă S_T^F este o acoperire poliedral exhaustibilă, putem înlocui exhaustiunea dată V_k cu o exhaustiune $\tilde{V}_k$ astfel încît $\tilde{\Gamma}_k$ să nu conțină puncte de ramificare, iar $\tilde{\gamma}_k$ să se afle într-o vecinătate arbitrară a lui γ_k . Printr-o astfel de înlocuire, mulțimile $\mathcal{L}$ și $\mathcal{M}$ nu se schimbă. Aceeași observare este valabilă pentru exhaustiuni parțial regulat, cînd se aplică propozițiile P_1 , P'_1 și T_1 din cap. II.

§ 2. Proprietăți locale

3.2. Presupunînd $\mathcal{L} \neq S$, vom stabili în cele ce urmează o serie de proprietăți ale acoperirilor poliedral exhaustibile.

P_1 . Domeniile maxime ale unui domeniu compact $\Delta \subset S$, pentru care $\Delta \cap \mathcal{L} = 0$, sînt normale.

Există un prim indice k_0 astfel încît pentru $k \geq k_0$, să avem $\gamma_k \cap \Delta = 0$. Fie (Δ, P) un domeniu maxim al lui Δ . Îndată ce $k \geq k_1$, avem $V_k \cap$

¹ Dacă un șir de puncte de ramificare au aceeași proiecție p , atunci punctul p este considerat în mulțimea R .

$(\Delta, P) \neq 0$. Atunci, sau $k_1 \geq k_0$ și cum $(\Delta, P) \cap \Gamma_{k_1} = 0$, domeniul $(\Delta, P) \subset \mathring{V}_{k_1} - V_{k_1-1}$; sau $k_1 < k_0$ și există un prim indice $k_2 \leq k_0$, astfel încît $(\Delta, P) \subset \mathring{V}_{k_2} - V_{k_2-1}$.

P_2 . Orice regiune maximă d^* a unui domeniu $d \subset S$, pentru care $d \cap \mathcal{L} = 0$, generează o suprafață $S_T^{d^*}$ normal exhaustibilă.

Într-adevăr, este suficient să aplicăm propoziția P_1 domeniilor poliedrice d_k dintr-un șir de exhaustiune a lui d și unui punct P din d^* cu $T(P) \in d_1$ pentru a deduce că domeniile $d_k^* = (d_k, P)$ formează o exhaustiune normală a lui $S_T^{d^*}$.

Din propoziția P_2 rezultă imediat teorema:

T_1 . Fie S_T^V o acoperire poliedral exhaustibilă, pentru care $\mathcal{L} \neq S$. Dacă D este una din componentele conexe ale mulțimii $S - \mathcal{L}$ atunci sau $T(V) \supset D$ sau $T(V) \cap D = 0$.

Dacă $\tilde{V}$ este o componentă conexă a mulțimii $V - T^{-1}(\mathcal{L})$, atunci acoperirea $S_T^{\tilde{V}}$ este normal exhaustibilă.

Într-adevăr $\tilde{V}$ coincide cu o regiune maximă a unui domeniu D .

P_3 . Fie d un domeniu din S , cu frontiera relativă g compactă și inclusă în $S - \mathcal{L}$. Fie S_T^V o acoperire riemanniană și V_k o exhaustiune poliedrală astfel încît mulțimea $\gamma_k \cap d$ să fie formată dintr-un număr finit de curbe jordaniane disjuncte două câte două și să nu prezinte puncte excepționale relativ la $S_T^{V_k}$. Atunci oricare ar fi regiunea maximă d^* a lui d , acoperirea $S_T^{d^*}$ este parțial regulat exhaustibilă.

Dacă d^* este relativ compact în V , acoperirea $S_T^{d^*}$ este totală. Să presupunem deci d^* domeniu necompact. Închidem g într-un domeniu sau o reuniune finită de domenii poliedrice Δ , astfel încît $\Delta \cap \gamma_k = 0$, pentru $k \geq k'_0$. Alegem un punct $P \in d^*$ cu $T(P) \in d - \Delta$; pentru $k \geq k'_0$ punctul $P \in V_k$. Notăm $k_0 = \max(k'_0, k''_0)$. Considerăm o aproximare a mulțimii $\Delta \cap d$ cu domenii poliedrice (sau reuniuni de domenii poliedrice), $\tilde{d}_n$ cu frontiera formată din curbe jordaniane disjuncte două câte două g_n , care aproximează g , și din curbele frontierei lui Δ incluse în d . Luăm $\tilde{d}_n$ astfel încît pe g_n să nu se proiecteze nici un punct de ramificare din V_{n+k_0} . Fie $d_n = \tilde{d}_n \cup (d - \Delta)$ și d_n^* componenta conexă a lui $(d_n, P) \cap V_{n+k_0}$, care include punctul P , domeniu poliedric cu frontiera formată dintr-un număr finit de curbe jordaniane disjuncte din $T^{-1}(g_n)^1$ și din Γ_{n+k_0} . Acoperirea $S_T^{d_n^*}$ este parțial regulată, iar d_n^* constituie o exhaustiune a lui d^* .

O_2 . Evident, oricare ar fi acoperirea riemanniană S_T^V , fiecare domeniu maxim al unui domeniu închis $\delta \subset S$, cu $\delta \cap \mathcal{A} = 0$, acopere δ numai cu foi complete. Dacă $\delta \cap \mathcal{A} \neq 0$, există cel puțin un domeniu maxim al lui δ necompact.

3.3. P_4 . Orice punct $p \in S - [\mathcal{A} \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{M})]$ admite o vecinătate închisă v ale cărei domenii maxime sînt toate normale.

¹ Conform P_1 aplicat lui Δ , $T^{-1}(g_n)$ constă din componente conexe compacte.

Într-adevăr, dacă $p \in \mathcal{L}$, P_4 rezultă direct din P_1 . Dacă $p \in \mathcal{L} - \mathcal{M}$, există un subsir V_{k_j} și o vecinătate închisă a lui p , care nu conține puncte din γ_{k_j} ; aplicînd P_1 exhaustiunii V_{k_j} deducem din nou P_4 . Fie $p \in \mathcal{M} - (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ și o vecinătate v pentru care $v \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}) = \emptyset$. Conform O_2 , orice domeniu al lui v are numai foi complete și, cum $v \cap \mathcal{R} = \emptyset$, cuprinde un număr finit de puncte de ramificare, deci un număr finit de foi: prin urmare este compact.

P_5 . Punctele $p \in (\mathcal{M} \cap \mathcal{R}) - \mathcal{A}$ pot avea vecinătăți închise cu toate domeniile maxime normale sau nu. În ultimul caz domeniile maxime necompacte pot fi limitate de o infinitate de contururi închise sau de spirale cu o infinitate de foi peste frontiera vecinătății corespunzătoare. Ele pot să nu acopere parțial regulat exhaustibil S .

Propoziția P_5 este valabilă și pentru acoperiri S_T^v parțial regulat exhaustibile, după cum rezultă prin construire de exemple.

Fie S_T^v o acoperire $E_{2\gamma}$, 3.1, pentru care $\mathcal{A} = \emptyset$ și există un punct $c \in \mathcal{M} \cap \mathcal{R}$. Orice vecinătate suficient de mică a lui c are domeniile maxime normale.

Exemple de acoperiri, pentru care în $(\mathcal{M} \cap \mathcal{R}) - \mathcal{A}$ există puncte, astfel încît orice vecinătate a lor are și domenii maxime necompacte, cu proprietățile indicate în P_5 sînt date de E_3 ($E_{3\alpha}$ și $E_{3\beta}$) din lucrarea [26] p. 313–314, pe care pentru uniformizarea notației le vom cita în lucrarea de față cu numerele E_4 ($E_{4\alpha}$ respectiv $E_{4\beta}$).

P_5 . Vecinătățile punctelor $p \in \mathcal{A}$ au cel puțin un domeniu maxim necompact (observarea O_2). Dacă $p \in \mathcal{A} \cap \mathcal{R}$, se poate chiar și în cazul acoperirilor parțial regulat exhaustibile, ca o vecinătate a lui p să aibă toate sau o parte din domeniile maxime neacoperind parțial regulat S .

Această propoziție rezultă de asemenea din exemplele $E_{4\alpha}$, $E_{4\beta}$, $E_{4\gamma}$ din [26] p. 314–315, pe care din nou pentru unificarea notației le vom numerota în lucrarea de față $E_{5\alpha}$, $E_{5\beta}$, $E_{5\gamma}$.

§ 3. Aplicații

3.4. Rezultatele stabilite în § 1 și § 2 ne permit să aprofundăm proprietățile diferitelor clase de acoperiri riemanniene. Ca un exemplu prezentăm în acest paragraf o serie de teoreme relative la acoperirile E -cvasinormal exhaustibile, 2.1, 2°.

Fie deci S_T^v o acoperire E -cvasinormal exhaustibilă. Cercetînd mulțimea limită din 3.1 pentru o exhaustiune E -cvasinormală a lui S_T^v se deduce imediat incluziunea

$$\mathcal{L} \subset \text{fr. } E. \quad (3.3)$$

Ținînd seama că $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}$ rezultă de aici că pentru o acoperire parțială regulat exhaustibilă nu există întotdeauna o mulțime E în raport cu care acoperirea să fie E -cvasinormal exhaustibilă. Într-adevăr, putem formula propoziția:

P_5 . O condiție necesară ca o acoperire parțial regulat exhaustibilă să fie E -cvasinormal exhaustibilă este că mulțimea $\mathcal{A}$ să nu aibă puncte interioare.

Exemplul E_1 , 3.1, arată însă că există acoperiri parțial regulat exhaustibile pentru care $\mathcal{A}$ umple un domeniu.

În lucrarea [26] p. 317 am demonstrat teorema :

T_2 . Condiția necesară și suficientă ca o acoperire parțial regulat exhaustibilă să fie $\mathcal{L}$ -cvasinormal exhaustibilă este ca fiecare componentă conexă $\mathcal{C}$ a mulțimii $T^{-1}(\mathcal{L})$ să fie compactă.

În particular, această teoremă arată că

P_8 . Orice acoperire E -cvasinormal exhaustibilă este și $\mathcal{L}$ -cvasinormal exhaustibilă.

Ținând seama de proprietățile transformărilor interioare, deducem

P_9 . Acoperirile riemanniene pentru care $\mathcal{L}$ este total discontinuă, sînt $\mathcal{L}$ -cvasinormal exhaustibile¹.

Fie $D = S - \mathcal{L}$ și $W = V - T^{-1}(\mathcal{L})$; după T_1 acoperirea S_T^W e normal exhaustibilă. Notăm D_n o exhaustiune a lui D , d_{jn} componentele conexe ale lui $S - D_n$ și W_n exhaustiunea lui W corespunzătoare șirului D_n . Fie $\mathcal{W}_n$ domeniul poliedric obținut adăugînd la W_n domeniile normale de pe d_{jn} adiacente la W_n , dacă există. Însemnăm cu k_n cel mai mic indice k , pentru care W_k include curbele frontieră a lui $\mathcal{W}_n$ și $k_n > k_{n-1}$. Șirul $V_n = W_{k_n} \cup \mathcal{W}_n$ formează o exhaustiune $\mathcal{L}$ -cvasinormală a lui S_T^V .

Din T_2 rezultă și un alt criteriu :

P_{10} . Ca o acoperire parțial regulat exhaustibilă să fie E -cvasinormală, pentru o anumită mulțime închisă $E \subset S$, $E \neq S$, este necesar ca mulțimea $T^{-1}(\mathcal{A})$ să aibă componentele conexe compacte.

3.5. În multe aplicații prezintă interes o normare a șirului de exhaustiune. În acest scop, am stabilit în lucrare [26] p. 319 propoziția :

T_3 . Orice suprafață E -cvasinormal exhaustibilă admite o exhaustiune parțial regulată V_k cu următoarele proprietăți :

1) Domeniile D_{ik} formează o exhaustiune oricît de apropiată de o exhaustiune arbitrar dată D_{ik}^o a lui D_i .

2) Curbele γ_k împart S în domenii $D_{ik} \subset D_i$ și domenii d_{jk} , fiecare d_{jk} avînd puncte comune cu mulțimea E . Dacă n_{ik} este numărul foilor lui V_k peste un domeniu D_{ik} , iar $\bar{n}_{jk}$ numărul foilor lui V_k peste un domeniu d_{jk} adiacent cu domeniul D_{ik} considerat, atunci $n_{ik} \geq \bar{n}_{jk}$.

3.6. Rezultatele din acest capitol se aplică și la studiul acoperirilor complete. Menționăm că exemplele E_1 , E_2 , E_3 din §1 sînt acoperiri complete parțial regulat exhaustibile; E_1 și E_3 arată că aceste acoperiri nu sînt totdeauna E -cvasinormal exhaustibile, respectiv cvasitotal exhaustibile în sens larg sau strict.

§ 4. Proprietățile Iversen și Blaschke

3.7. Rezultatele precedente pot fi folosite și pentru a stabili legături între clasele de acoperiri poliedral exhaustibile și acoperirile Iversen introduse de S. Stoilow [4], [7], [8] sau acoperirile Blaschke definite de

¹ Evident aceste acoperiri aparțin chiar cazului considerat de T. Kuroda.

M. Heins [13]. Prescurtat proprietățile acestea vor fi notate I, LI resp. Bl, L Bl, L Bl₁, litera L din LI, L Bl, L Bl₁ înseamnă *local*.

Din propozițiile $P_4 - P_5$ și teoremele generale relative la acoperirile Bl, L Bl resp. L Bl₁ [13] deducem :

P_{11} . O acoperire riemanniană poliedral exhaustibilă e L Bl₁, pentru orice $p \in S - [\mathcal{A} \cup (\mathcal{M} \cap \mathcal{R})]$, și L Bl pentru orice $p \in S - \mathcal{A}$. Dacă $\mathcal{A}$ este de capacitate nulă, suprafața este de tip Bl.

Deoarece proprietatea Blaschke implică proprietatea Iversen [8] și L Bl implică L I, se pot formula imediat condiții suficiente ca o acoperire să fie de clasă I sau să aibă proprietatea LI pentru anumite puncte. De exemplu

P_{12} . O acoperire riemanniană poliedral exhaustibilă, pentru care $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ sau $\mathcal{A}$ este total discontinuă are proprietatea I.

Într-adevăr dacă mulțimea valorilor asimptotice este total discontinuă, acoperirea este de clasă I, [8].

În cazul acoperirilor normal exhaustibile am demonstrat toerema [22] :

T_4 . Condiția necesară și suficientă ca o acoperire normal exhaustibilă S_r^v să fie de clasă I relativ la S este ca mulțimea lacunară $E = S - T(V)$ să fie total discontinuă.

P_{13} . O acoperire E -cvasinormal exhaustibilă, pentru care E este total discontinuă are proprietatea I, (deoarece $\mathcal{A} \subset E$), dar în acest caz condiția nu este necesară, după cum arată exemplul E_2 din [25] p. 222, în care $\mathcal{L} = \mathcal{A}$ formează un continuu, dar acoperirea e de clasă I. Vom cita acest exemplu cu numerotarea E_6 .

De altfel proprietatea Iversen și proprietatea Gross sînt adevărate pentru toate acoperirile complete și am văzut (exemplu $E_{1\beta}$) că există astfel de acoperiri cu $\mathcal{A} = S^1$.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Stoilow: *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier Villars, Paris, 1938, 1956.
2. R. Nevanlinna: *Eindeutige analytische Funktionen*, Springer, Berlin Göttingen Heidelberg, 1953.
3. L. Ahlfors: *Zur Theorie der Überlagerungsflächen*, Acta Math., 65, 1935, p. 157—194.
4. S. Stoilow: *Sur les fonctions analytiques dont les surfaces de Riemann ont des frontières totalement discontinues*, Math. Cluj, 12, 1936, p. 123—138.
5. S. Stoilow: *Sur une classe de surfaces de Riemann régulièrement exhaustibles et sur le théorème des disques de M. Ahlfors*, C. R. Paris 207, 1938, p. 517—518.
6. S. Stoilow: *Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces*, Compositio Math., 7 fasc. 8, 1940, p. 428—435.
7. S. Stoilow: *Sur les singularités des fonctions analytiques multiformes, dont la surface de Riemann a sa frontière de mesure harmonique nulle*, Math. Cluj, 19, 1943, p. 126—138.

¹ Alte rezultate asupra singularităților funcțiilor analitice în sensul cercetărilor lui Iversen, Goldberg, etc. a se vedea în [36], [26].

8. S. Stoilow: *Note sur les fonctions analytiques multiformes*, Ann. Soc. Polonaise Math. 25, 1952, p. 69–74.
9. S. Stoilow: *Sur la classification topologique des recouvrements riemanniens*, Rev. Math. pures appl., 1, fasc. 2, 1956, p. 37–42.
10. S. Stoilow: *Sur quelques points de la théorie moderne des surfaces de Riemann*, Rend. Mat. e sue appl., S.V., 16, 1957, p. 170–196.
11. S. Stoilow: *Sur la théorie topologique des recouvrements riemanniens*, Ann. Acad. Sci. Fenn. I Math., 250/35, 1958.
12. Л. П. Волковьский: *Исследование по проблеме тупа*, Труды Мат. Инст. Стеклова, 34, Москва-Ленинград, 1950.
13. M. Heins: *On the Lindelöf principle*, Ann. Math., 61, 1955, p. 440–473.
14. M. Heins: *Lindelöfian maps*, Ann. Math. 62, 1955, p. 418–446.
15. L. V. Ahlfors, L. Sario: *Riemann surfaces*, Princeton, 1960.
16. H. Wittich: *Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen*, Springer, 1955, Fiz-mat-giz, 1960.
17. K. Noshiro: *Cluster Sets*, Springer, 1960; I. L. Moskva, 1963.
18. C. Constantinescu, A. Cornea: *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*. Springer, 1963.
19. C. Andreian Cazacu: *Teorema discurilor pentru suprafețe riemanniene normal exhaustibile*, Bul. Șt. Mat. Fiz., 41, nr. 2, 1952, p. 263–272.
20. C. Andreian Cazacu: *Asupra teoriei lui R. Nevanlinna*, Bul. Șt. Mat. Fiz. 6, nr. 2, 1954, p. 271–296.
21. C. Andreian Cazacu: *Legături între suprafețele riemanniene normal exhaustibile și suprafețele A_∞* . Bul. Șt. Mat. Fiz., 7, nr. 3, 1955, p. 529–542.
22. C. Andreian Cazacu: *Teorema lui Iversen pentru suprafețe riemanniene normal exhaustibile*, Com. Acad. R.P.R., 5, nr. 8, 1955, p. 1145–1150.
23. C. Andreian Cazacu: *Sur la classe des surfaces de Riemann normalement exhaustibles et ses relations avec d'autres classes*, C. R. Paris, 242, 1956, p. 2281–2283.
24. C. Andreian Cazacu: *Über die normal ausschöpfbaren Riemannschen Flächen* Math. Nachr. Berlin, 15, caet 2, 1956, p. 77–86.
25. C. Andreian Cazacu: *Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile*, Lucrările colocv. geom. și top. Iași, 1958, Ed. Acad. R.P.R. p. 219–226.
26. C. Andreian Cazacu: *Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile*, Studii și Cercetări, 10, nr. 2, 1959, p. 307–323.
27. C. Andreian Cazacu: *Über eine Formel von S. Stoilow*, Rev. Math. pures appl., 5, nr. 1, 1960, p. 59–74.
28. C. Andreian Cazacu: *Überlagerungseigenschaften von Riemannschen Flächen*, Rev. Math. pures appl., 6, nr. 4, 1961, p. 685–701.
29. C. Andreian Cazacu: *Asupra funcțiilor meromorfe cu mulțimea singularităților esențiale de capacitate logaritmică nulă*, An. Univ. 1961, p. 71–81.
30. C. Andreian Cazacu: *О разветлении накрывающих*, Lucrările Conferinței de Teoria Funcțiilor, Moscova 1962.
31. C. Andreian Cazacu: *Suprafețe riemanniene parțial regulat exhaustibile*, An. Univ. București, an 11, 34, 1962, p. 125–154.
32. C. Andreian Cazacu: *Méthodes topologiques dans la théorie des surfaces de Riemann*, Proc. Symposium Topologie Prague, 1961, p. 59–63.
33. A. Pfluger: *Theorie der Riemannschen Flächen*, Springer, 1957.
34. T. Kuroda: *Remarks on some covering surfaces*, Rev. Math. pures appl., 1957, 2, p. 263–268.
35. G. T. Whyburn: *Open mappings on locally compact spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc. 1, 1950.
36. C. Andreian Cazacu: *Suprafețe riemanniene normal exhaustibile*. Disertație de candidat, București, 1955.
37. R. Osserman: *Riemann surfaces of class A*. Trans. Amer. Math. Soc., 82, 1956, p. 217–245.

КЛАССЫ РИМАНОВЫХ НАКРЫВАЮЩИХ. I.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Цель этой работы — построение единой теории римановых накрывающих, исходя из свойств исчерпания накрывающего.

В первой главе, мы определяем *полиэдрическое накрывающее* (или P накрывающее), понятие, лежащее в основе нашего исследования. Пусть S ориентируемая и триангулируемая поверхность, γ — конечное множество попарно не пересекающихся жордановых кривых и жордановых дуг, с концами в точках или в граничных элементах S , так чтобы, если $\mathfrak{A}$ обозначает множество концов из S , пересечение одной дуги из γ с другой или с кривой из γ принадлежало бы к $\mathfrak{A}$. Последовательность точек поверхности стремится к своей границе, если не имеет точек прикосновения на этой поверхности. Риманово накрывающее S_T^V (поверхности S через поверхность V по внутреннему преобразованию T) удовлетворяет условию (β_1) Стоилова относительно γ , если каждая последовательность точек $P_k \in V$ стремящаяся к границе V , проектируется в последовательность $T(P_k) \in S$, стремящуюся к γ или к границе S . Риманово накрывающее S_T^V называется полиэдрическим, если оно удовлетворяет условию (β_1) относительно некоторого множества $\gamma \subset S$ и если Эйлера характеристика V конечна.

Такое накрывающее гомеоморфно с S_T^W , где W — полиэдрическая область римановой поверхности R с конечным числом граничных, попарно не пересекающихся, аналитических жордановых кривых, и f — аналитическое отображение R в S . Мы доказываем, что исключая конечное множество точек $E \subset S$, каждая точка $p \in \gamma$ обладает свойством $(L \beta_2)$: Существует такая окрестность v точки p , что прообраз связного компонента $v \cap \gamma$, содержащего p , имеет в V относительно компактные связные компоненты или является пустым. S_T^V имеет конечное число точек разветвления и (1.3) обобщает формулу Гурвица Стоилова (Пусть D_j — связные компоненты $S - \gamma$, γ' — подмножество жордановых кривых из $\gamma - (E \cup \mathfrak{A})$, $E_{\gamma'}$ — множество точек γ' исключительных относительно γ' , γ'_a — множество простых дуг, на которые разбивается $(\gamma' - E_{\gamma'}) \cup [(\gamma - \gamma') - (E \cup \mathfrak{A})]$ и p_b — точки множества $E_{\gamma'} \cup [(E \cup \mathfrak{A}) - \gamma']$. Тогда в формуле (1.3) γ обозначает порядок разветвления S_T^V , ρ и ρ_j — характеристики V и D_j , n_j , x_a и y_b — число листов S_T^V над D_j , γ'_a соответственно p_b).

Исчерпание $\{V_k\}$ поверхности V (полиэдрическими областями $V_k \subset V$, с свойствами $V_k \subset V_{k+1}$, $\bigcup V_k = V$) называется *полиэдрическим* (исчерпанием P), если каждое накрывающее $S_T^{V_k}$ является полиэдрическим. (Если Γ_k — граница V_k , γ замещается γ_k). Во второй главе мы рассмотрим различные примеры накрывающих класса P (нормально, частично регулярно, квази-тотально исчерпываемые накрывающие и т.д.). Значение полиэдрического исчерпания состоит в том, что каждое риманово накрывающее допускает такое исчерпание и что результаты, полученные относительно этого исчерпания, имеют широкое применение.

Третья глава содержит локальные свойства накрывающие класса P . Мы рассматриваем множества: $\mathcal{E} = \{p \in S, p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{k_j}, p_{k_j} \in \gamma_{k_j}\}$, $\mathcal{M} = \{p \in S, p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k, p_k \in \gamma_k\}$, $\mathcal{A}$ — замыкание множества асимптотических значений отображения T и $\mathcal{Q}$ — множество последовательностей проекции точек разветвления S_T^V и устанавливаем ряд свойств наложения.

Например, пусть $\mathcal{E} \neq S$, δ — область на S , и Δ — связный компонент прообраза $T^{-1}(\delta)$:

1) если $\bar{\delta}$ компактно в $S - \mathcal{L}$, то δ_T^Δ является тотальным накрывающим, 2) если $\delta \subset S - \mathcal{L}$, то S_T^Δ является нормально исчерпываемым, 3) если граница δ компактна и принадлежит к $S - \mathcal{L}$, и если $\gamma_k \cap \delta$ удовлетворяет еще одному условию, то S_T^Δ является частично регулярно исчерпываемым.

Во второй части работы будут исследованы другие свойства класса P .

CLASSES DE RECOUVREMENTS RIEMANNIENS. I.

R E S U M É

Le but de ce travail est de construire une théorie unitaire des recouvrements riemanniens, en prenant comme critère général de classification les propriétés d'une exhaustion du recouvrement. †

Dans le chap. I, nous définissons le *recouvrement polyédrique*, (ou le *recouvrement P*), qui constitue la base de notre travail. Soit S une surface orientable et triangulable et sur S un ensemble fini γ de courbes de Jordan, deux à deux disjointes et d'arcs de Jordan à extrémités bien déterminées dans des points ou des éléments frontière de S , tel qu'en désignant par $\mathcal{R}$ l'ensemble des extrémités, qui appartiennent à S , l'intersection d'un arc de γ avec un autre ou avec un courbe de γ soit contenue dans $\mathcal{R}$. On dit qu'une suite de points d'une surface tend vers la frontière (idéale) de cette surface, s'il n'admet pas de points d'accumulation dans cette surface. Le recouvrement riemannien S_T^V de S par la surface V selon la transformation intérieure T satisfait à la condition (β_1) de S. Stoilow par rapport à l'ensemble γ , si toute suite de points $P_k \in V$, qui tend vers la fr. V , se projette sur une suite de points $T(P_k) \in S$, qui tend vers γ ou vers la fr. S . Nous appelons le recouvrement riemannien S_T^V polyédrique, s'il remplit la condition (β_1) par rapport à un ensemble γ de S et si V a la caractéristique d'Euler finie. Un tel recouvrement est homéomorphe à un recouvre-

ment S_f^W , où W est un domaine polyédrique d'une surface de Riemann R , borné par un nombre fini de courbes de Jordan, deux à deux disjointes, analytiques sur R , et f une application analytique de R dans S . Nous démontrons qu'à l'exception d'un ensemble fini E de points de S , tout point $p \in \gamma$ a la propriété $(L \beta_2)$: Il existe un voisinage v de p tel que la pré-image de la composante connexe de $v \cap \gamma$, qui contient p , soit formée de composantes connexes relativement compactes dans V ou soit vide. De plus, S_T^V a un nombre fini de points de ramification et nous généralisons la formule de Hurwitz-Stoilow par la formule (1.3), qui donne l'ordre total de ramification r de S_T^V à l'aide de la caractéristique ρ de V , des caractéristiques ρ_j des domaines D_j (composantes connexes de $S - \gamma$) et des nombres des feuillets n_j , x_a resp. y_b de S_T^V sur D_j , γ_a'' et p_b . (Si γ' est un sous-ensemble de courbes de Jordan de $\gamma - (E \cup \mathcal{R})$, $E_{\gamma'}$ l'ensemble des points de γ' exceptionnels par rapport à γ' , γ_a'' désignent les arcs simples formés sur $(\gamma' - E_{\gamma'}) \cap [(\gamma - \gamma') - (E \cup \mathcal{R})]$ et p_b les points de $E_{\gamma'} \cup [(E \cup \mathcal{R}) - \gamma']$).

Une *exhaustion* $\{V_k\}$ de V (c.-à-d. une suite de domaines polyédriques V_k de V , avec les propriétés $V_k \subset \overset{\circ}{V}_{k+1}$, $\bigcup V_k = V$) s'appelle *polyédrique* (exhaustion P) si tout recouvrement S_T^V est polyédrique. Si Γ_k est la fr. V_k , $\gamma_k = T(\Gamma_k)$ joue le rôle de γ de la définition précédente. Le chap. II contient différents exemples de classes de recouvrements riemanniens à exhaustion polyédrique (recouvrements de classe P): les recouvrements normalement, partiellement régulièrement resp quasi-totalement exhaustibles, les recouvrements complets, etc. L'importance de l'étude de l'exhaustion polyédrique consiste en ce que tout recouvrement riemannien admet une telle exhaustion, donc les résultats obtenus pour cette exhaustion ont un champ d'application tout à fait général.

Le chap. III contient des propriétés locales des recouvrements de classe P . Nous considérons les ensembles de limites $\mathcal{L} = \{p \in S, p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{k_j}, p_{k_j} \in \gamma_{k_j}\}$, $\mathcal{M} = \{p \in S, p =$

$= \lim_{k \rightarrow \infty} p_k$, $p_k \in \gamma_k$, $\mathcal{A}$ = l'adhérence de l'ensemble des valeurs asymptotiques de T , $\mathcal{R}$ = l'ensemble des limites des suites de projections de points de ramification de S_T^V . Evidemment $\mathcal{L} \supset \mathcal{M} \supset \mathcal{A} \supset 0$, chacune de ces inclusions pouvant être stricte ou non. Soit $\mathcal{L} \neq S, \delta$ un domaine de S et $\Delta \subset V$ une composante connexe de $T^{-1}(\delta)$: 1) Si $\bar{\delta}$ est compact dans $S - \mathcal{L}$, δ_T^Δ est total; 2) Si $\delta \subset S - \mathcal{L}$, S_T^Δ est normalement exhaustible; 3) Si fr. $\delta \subset S - \mathcal{L}$, si elle est compacte, et si $\gamma_k \cap \delta$ remplit certaines conditions, S_T^Δ est partiellement régulièrement exhaustible. Tout point $p \in S - [\mathcal{A} \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{M})]$ admet un voisinage recouvert totalement par chacune des composantes connexes de sa pré-image. Cette propriété peut encore persister pour les points $p \in (\mathcal{R} \cap \mathcal{M}) - \mathcal{A}$, mais cesse au cas $p \in \mathcal{A}$. Nous démontrons aussi des relations entre différentes classes de recouvrements à exhaustion polyédrique et des résultats concernant les propriétés I et Bl .

La deuxième partie du travail (chap. IV—VI) sera consacré à l'étude de la ramification, de la repartition des valeurs et du type des recouvrements de classe P .

ECUAȚII FREDHOLM DE PRIMA SPEȚĂ CU INTEGRALE STIELTJES LEBESGUE

EUGEN CÂMPU

În această lucrare se dau condiții necesare și suficiente de existență și unicitate a soluției f a ecuației integrale

$$\int_a^b K(x, y) f(y) d\sigma(y) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

analoge teoremelor lui Picard și Soula, unde funcțiile

$$f: [a, b] \rightarrow \bar{R}, \quad g: [a, b] \rightarrow \bar{R}$$

și

$$K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \bar{R}$$

sint presupuse măsurabile în raport cu măsura generalizată Stieltjes Lebesgue σ , respectiv $\sigma \times \sigma$, și de pătrat integrabil.

În încheiere, se aplică aceste rezultate la sistemele de ecuații lineare cu o infinitate de necunoscute.

1. Notății

Fie $s: [a, b] \rightarrow R$ o funcție cu variație mărginită. Să notăm cu v funcția aditivă de interval definită astfel:

$$v(I) = s(\beta) - s(\alpha), \quad \text{unde } I = [\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$$

Fie v^+ , v^- , $|v|$ variația superioară, inferioară, respectiv totală a lui v . Vom construi tribul borelian S al mulțimilor $|v|$ -măs. Stieltjes Lebesgue și vom nota cu $|\sigma|$, σ^+ , σ^- măsurile generate pe acest trib de funcțiile $|v|$, v^+ și respectiv v^- . Vom nota cu σ măsura generalizată $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$.

Pentru construcția acestei măsuri și proprietățile integralei Stieltjes Lebesgue vezi [1].

În mulțimea $[a, b]^2 \subseteq R^2$ vom nota cu S_1 tribul borelian al mulțimilor $|v| \times |v|$ -măsurabile Stieltjes Lebesgue. Pe acest trib vom

defini măsurile produs (generalizate sau nu) $|\sigma| \cdot |\sigma|$, $|\sigma| \cdot \sigma$, $\sigma \cdot |\sigma|$ și $\sigma \cdot \sigma$.

Vom mai nota cu S_2 și S_3 tribul borelian al mulțimilor $|\nu| \times |\nu| \times |\nu|$ — măs. din $[a, b]^3$ și respectiv $|\nu| \times |\nu| \times |\nu| \times |\nu|$ măs. din $[a, b]^4$ și pe ele vom considera măsurile produs generalizate sau nu obținute din măsurile σ și $|\sigma|$ de pe S .

Pentru o funcție $f: [a, b] \rightarrow \bar{R}$, integrabilă în raport cu $|\sigma|$, vom nota

$$\int_{[a, b]} f d|\sigma| = \int_{[a, b]} f(x) d|\sigma|(x), \quad \int f d\sigma = \int f(x) d\sigma(x),$$

omitind în scriere limitele de integrare și punind în evidență argumentul $x \in [a, b]$.

Dacă $F: [a, b]^2 \rightarrow \bar{R}$ este integrabilă în raport cu $\sigma \cdot \sigma$, vom nota

$$\int_{[a, b]^2} F d\sigma \cdot \sigma = \iint F(x, y) d\sigma(x) \cdot \sigma(y),$$

$$\int_{[a, b]^2} F d|\sigma| \cdot |\sigma| = \iint F(x, y) d|\sigma|(x) \cdot \sigma(y), \text{ ș.a.m.d.,}$$

iar dacă F_x , $x \in [a, b]$ este funcția parțială a lui F , definită prin egalitatea $F_x(y) = F(x, y)$, $y \in [a, b]$, vom nota

$$\int F_x d\sigma = \int F(x, y) d\sigma(y), \quad \int F_x d|\sigma| = \int F(x, y) d|\sigma|(y),$$

în ipoteza că aceste integrale există.

Notății analoge vom face pentru integralele funcțiilor sumabile definite pe $[a, b]^3$ sau $[a, b]^4$.

Fie $\mathcal{L}^2$ mulțimea funcțiilor $f: [a, b] \rightarrow \bar{R}$ măsurabile și de pătrat integrabil în raport cu $|\sigma|$.

Vom spune că funcțiile $f, g \in \mathcal{L}^2$ sînt echivalente și vom nota $f \sim g$, dacă

$$|\sigma|(\{x | f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

Vom nota spațiul cît $\mathcal{L}^2 / \sim = \mathbf{L}^2$ iar clasa de echivalență a lui $f \in \mathcal{L}^2$ cu $\hat{f}$.

Spațiul $\mathbf{L}^2$ devine spațiu Hilbert peste corpul nr. reale, dacă definim :

$$\text{a) } \hat{f} + \hat{g} = \widehat{f+g}, \text{ unde } \hat{f}, \hat{g} \in \mathbf{L}^2$$

$$\text{b) } \hat{\lambda f} = \widehat{\lambda \cdot f}, \quad \text{unde } \lambda \in R, \hat{f} \in \mathbf{L}^2$$

c) produsul scalar

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int f(x) g(x) d|\sigma|(x); \quad \hat{f}, \hat{g} \in \mathbf{L}^2$$

În toate considerațiile care vor urma, clasa de echivalență a lui $f \in \mathcal{L}^2$ o vom nota cu aceeași literă f .

Vom păstra notația $\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$, unde $f \in \mathcal{L}^2$.

2. Preliminarii

Fie $K: [a, b]^2 \rightarrow \bar{R}$ o funcție măsurabilă și de pătrat integrabil în raport cu $|\sigma| \cdot |\sigma|$:

$$c^2 = \iint K^2(x, y) d|\sigma|(x) \cdot |\sigma|(y) < +\infty.$$

Vom defini operatorul $T: \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{L}^2$ prin relația:

$$(Tf)(x) = \int K(x, y) f(y) d\sigma(y), f \in \mathcal{L}^2$$

Pentru aceasta trebuie să verificăm următoarele:

1°. Funcția $y \in [a, b] \rightarrow K(x, y) f(y)$ este integrabilă în raport cu σ pentru aproape toți $x \in [a, b]$.

2°. Funcția $x \in [a, b] \rightarrow \int K(x, y) f(y) d\sigma(y)$

este măsurabilă și de pătrat integrabil în raport cu $|\sigma|$.

Pentru a demonstra punctul 1°, să observăm că funcția $K \cdot f$ este măsurabilă în raport cu tribul S_1 , fiind produsul a două funcții măsurabile.

Aplicând inegalitatea lui Schwarz-Buniakovski și teorema lui Fubini pentru funcții pozitive, obținem:

$$\begin{aligned} \iint |K(x, y) f(y)| d|\sigma|(x) \cdot |\sigma|(y) &\leq \left(\iint K^2(x, y) d|\sigma|(x) \cdot |\sigma|(y) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\ &\cdot \left(\iint |f(y)|^2 d|\sigma|(x) \cdot |\sigma|(y) \right)^{\frac{1}{2}} = c \left[\int \left(\int f^2(y) d|\sigma|(y) \right) d|\sigma|(x) \right]^{\frac{1}{2}} = \\ &= c \cdot \left(\int_a^b V(s) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\| < +\infty \end{aligned}$$

unde $\int_a^b V(s)$ este variația totală a funcției s pe $[a, b]$.

În consecință funcția $(x, y) \rightarrow K(x, y) f(y)$ este integrabilă în raport cu $\sigma \cdot \sigma$ și atunci din teorema lui Fubini rezultă că

$$\int K(x, y) f(y) d\sigma(y)$$

există aproape pentru toți $x \in [a, b]$ (în celelalte puncte îi vom da valoarea zero) și este măsurabilă în raport cu tribul S .

Să demonstrăm acum punctul 2°:

$$\int \left(\int K(x, y) f(y) d\sigma(y) \right)^2 d|\sigma|(x) \leq \int \left(\int |K(x, y) f(y)| d|\sigma|(y) \right)^2 d|\sigma|(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\iint |K(x, y) f(y)| d|\sigma|(y) \right) \cdot \left(\int |K(x, z) f(z)| d|\sigma|(z) \right) d|\sigma|(x) = \\
&= \iint \left(\iint |K(x, y) \cdot K(x, z) f(y) f(z)| d|\sigma|(y) \cdot d|\sigma|(z) \right) d|\sigma|(x) = \\
&= \iiint |K(x, y) f(y)| \cdot |K(x, z) f(z)| d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \cdot d|\sigma|(z) \leq \\
&\leq \left(\iiint |K(x, y) f(y)|^2 d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\iint |K(x, z) f(z)| d|\sigma|(x) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot d|\sigma|(z) \right)^{\frac{1}{2}} = \iint \left(\iint K^2(x, y) f(y)^2 d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \right) d|\sigma|(z) = \\
&= \iint K^2(x, y) d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \cdot \int f^2(z) d|\sigma|(z) = c^2 \cdot \|f\|^2 < +\infty
\end{aligned}$$

Am putut face aceste calcule deoarece funcțiile

$$(x, y, z) \rightarrow K(x, y) f(z) \quad \text{și} \quad (x, y, z) \rightarrow K(x, z) f(y)$$

sînt măsurabile în raport cu $|\sigma| \cdot |\sigma| \cdot |\sigma|$, ca produse de funcții măsurabile, ceea ce ne-a permis să aplicăm teorema lui Fubini și ineg. Schwarz-Buniakovski.

Ultima inegalitate se mai poate scrie

$$\|Tf\| \leq c \cdot \|f\|$$

ceea ce arată că T este un operator linear și continuu.

Vom demonstra următoarea

Propoziție. *Operatorul T definit mai sus, este complet continuu. Pentru aceasta vom demonstra două leme.*

Lema 1. *Dacă K_1 este un nucleu de rang finit, atunci transformarea $T_1: L^2 \rightarrow L^2$, definită prin egalitatea*

$$(T_1 f)(x) = \int K_1(x, y) f(y) d\sigma(y), f \in L^2$$

este un operator de rang finit.

Pentru demonstrație este suficient să observăm că

$$(T_1 f)(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) \cdot \int \psi_i(y) f(y) d\sigma(y), x \in [a, b]$$

deci T_1 transformă L^2 într-un subspațiu de dimensiune finită, deci este de rang finit.

Lema 2. *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un nucleu de rang finit K_ε astfel încît să avem :*

$$\left(\iint |K(x, y) - K_\varepsilon(x, y)|^2 d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$.

Pentru $n \in N$ să definim funcția

$$K_n(x, y) = \begin{cases} K(x, y) & \text{dacă } |K(x, y)| \leq n \\ 0 & \text{dacă } |K(x, y)| > n \end{cases}$$

Avem $|K(x, y) - K_n(x, y)|^2 \rightarrow 0$ a.p.t. cînd $n \rightarrow \infty$.

Deoarece $|K|^2$ este integrabilă și $|K(x, y) - K_n(x, y)|^2 \leq |K(x, y)|^2$, conform teoremei lui Lebesgue (vezi [1]) avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint |K(x, y) - K_n(x, y)|^2 d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) = 0,$$

deci există $n_0 = n_0(\varepsilon)$ astfel încît

$$(1) \left(\iint |K(x, y) - K_{n_0}(x, y)|^2 d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Deoarece K_{n_0} este mărginită și măsurabilă, există un șir $\{\Phi_n\}_{n \in N}$ de funcții simple, măsurabile și egal mărginite de n_0 , convergent a.p.t. $|\sigma| \cdot |\sigma|$ către K_{n_0} .

Din teorema lui Lebesgue deducem că există $n_1 = n_1(\varepsilon)$ astfel încît

$$(2) \left(\iint |\Phi_{n_1}(x, y) - K_{n_0}(x, y)|^2 d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{3}$$

Urmărim acum să aproximăm în normă pe Φ_{n_1} cu funcții în scară (constante pe intervale bidimensionale). Avem

$$\Phi_{n_1} = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{E_i}$$

unde $c_i \in R$ și χ_{E_i} sînt funcțiile caracteristice ale unor mulțimi măsurabile $E_i \in S_1 (i = 1, \dots, m)$.

Deoarece E_i este măsurabilă, există un șir de mulțimi deschise din plan $\{G_p^i\}_{p \in N}$ cu proprietățile $G_p^i \supseteq E_i (p = 1, 2, \dots)$ și $|\sigma| \cdot |\sigma| (G_p^i - E_i) < \frac{1}{2^p}$.

Se constată ușor că

(3) $\chi_{G_p^i} \rightarrow \chi_{E_i}$ a.p.t. cînd $p \rightarrow \infty$.

Fiecare mulțime deschisă G_p^i admite o descompunere de forma:

$$G_p^i = \bigcup_{q=1}^{\infty} I_q^{i,p}$$

unde $I_q^{i,p}$ sînt intervale disjuncte două cite două, de forma $[\alpha, \beta) \times [\gamma, \delta)$.

Dacă notăm

$$J_q^{i,p} = \bigcup_{r=1}^q I_r^{i,p}$$

atunci

$$G_p^i = \bigcup_{q=1}^{\infty} J_q^{i,p}$$

și

$$(4) \chi_{J_q^{i,p}} \rightarrow \chi_{G_p^i} \text{ a.p.t. cînd } q \rightarrow \infty.$$

Fie

$$\delta = \frac{\varepsilon^2}{9.8. [\max(|c_1|, \dots, |c_m|)]^2}.$$

Din relația (4) rezultă, conform teoremei lui Egorov, că pentru fiecare i și p există o mulțime $F_p^i \in \mathcal{S}_1$ cu $|\sigma| \cdot |\sigma| (F_p^i) = \frac{\delta}{m \cdot 2^p}$ și astfel încît

$$(5) \chi_{J_q^{i,p}} \xrightarrow{\text{uniform}} \chi_{G_p^i}, \text{ pe mulțimea } [a, b]^2 - F_p^i.$$

Din relațiile (3) și (5) se vede cu ușurință că putem extrage un șir diagonal

$$\{\chi_{J_{q(p)}^{i,p}}\}_{p \in \mathbb{N}} \rightarrow X_{Ei} \text{ (cînd } p \rightarrow \infty)$$

a.p.t. pe mulțimea $[a, b]^2 - F^i$, unde $F^i = \bigcup_{p=1}^{\infty} F_p^i$ și unde $q(p)$ este funcție de p . Avem și

$$|\sigma| \cdot |\sigma| (F^i) \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\delta}{m 2^p} = \frac{\delta}{m}.$$

$$\text{În concluzie, dacă } F = \bigcup_{i=1}^m F^i, \text{ atunci } |\sigma| (F) \leq \delta$$

și

$$(6) \sum_{i=1}^m c_i \chi_{J_{q(p)}^{i,p}} \rightarrow \Phi_{n_1} \text{ cînd } p \rightarrow \infty, \text{ a.p.t. pe } [a, b]^2 - F.$$

Deoarece funcțiile din relația (6) sînt egal mărginite de $M = \max(|c_1|, \dots, |c_m|)$, atunci din teorema lui Lebesgue rezultă că există $p_0 = p_0(\varepsilon)$ astfel încît

$$(7) \iint_{[a, b]^2 - F} \left| \sum_{i=1}^m c_i \chi_{J_{q(p_0)}^{i,p_0}} - \Phi_{n_1} \right|^2 d|\sigma| \cdot |\sigma| \leq \frac{\varepsilon^2}{2.9}$$

de unde deducem :

$$\begin{aligned} (8) \iint \left| \sum_{i=1}^m c_i \chi_{J_{q(p_0)}^{i,p_0}} - \Phi_{n_1} \right|^2 d|\sigma| \cdot |\sigma| &= \iint_F + \iint_{[a, b]^2 - F} \leq \\ &\leq |\sigma| \cdot |\sigma| (F) \cdot 4M^2 + \frac{\varepsilon^2}{2.9} \leq \frac{\varepsilon^2}{2.9} + \frac{\varepsilon^2}{2.9} = \frac{\varepsilon^2}{9}. \end{aligned}$$

Din relațiile (1), (2) și (8) deducem că

$$\left(\iint \left| K(x, y) - \sum_{i=1}^m c_i \chi_{j_{i,p_0}}(x, y) \right|^2 d|\sigma|(x) \cdot d|\sigma|(y) \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

Demonstrația lemei 2 este terminată dacă observăm că funcția

în scară $\sum_{i=1}^m c_i \chi_{j_{i,p_0}}$ este un nucleu de rang finit.

Într-adevăr, fie $I = [\alpha, \beta) \times [\gamma, \delta)$ un interval din cele de mai sus. Avem

$$\chi_I(x, y) = \varphi_{[\alpha, \beta)}(x) \cdot \varphi_{[\gamma, \delta)}(y),$$

unde $\varphi_{[\alpha, \beta)}$ și $\varphi_{[\gamma, \delta)}$ sînt funcțiile caracteristice ale intervalelor $[\alpha, \beta)$ și $[\gamma, \delta)$ pe dreaptă.

Dacă $J = \bigcup_{p=1}^m I_p$, unde intervalele $\{I_p\}$ nu se intersectează două cîte

două, atunci $\chi_J = \sum_{p=1}^m \chi_{I_p}$, deci χ_J este din nou un nucleu de rang finit.

O combinație lineară de nuclee de rang finit este de asemenea un nucleu de rang finit.

Vom trece acum la demonstrația propoziției. Numărul $\varepsilon > 0$ fiind dat, să considerăm operatorul de rang finit T_ε , definit prin $(T_\varepsilon f)(x) = \int K_\varepsilon(x, y) f(y) d\sigma(y)$, $f \in L^2$

unde K_ε este determinat din lema 2.

Conform inegalității stabilite în acest paragraf la nr. 2°,

avem $\|T_\varepsilon f - Tf\| = \left\| (T - T_\varepsilon)f \right\| \leq \left(\iint |K - K_\varepsilon|^2 d|\sigma| \cdot d|\sigma| \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\| \leq \varepsilon \cdot$

$\|f\|$, deci $\|T - T_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. Rezultă că T este un operator complet continuu, deoarece poate fi aproximat în normă cu operatori de rang finit.

3. Operatori complet continui în spații Hilbert

În acest paragraf vom stabili cîteva leme care ne vor fi utile mai departe.

Fie H un spațiu Hilbert și $T : H \rightarrow H$ un operator complet continuu. Fie $(\varphi_n)_n$ un sistem ortonormal de funcții proprii corespunzător valorilor proprii $(\lambda_n)_n$ ale operatorului complet continuu, simetric și pozitiv $T^* \cdot T$:

$$T^* T \varphi_n = \lambda_n \varphi_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

unde T^* este adjunctul operatorului T . Reamintim că luăm numai $\lambda_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) și $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$

Dacă notăm cu A operatorul definit prin relația

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \cdot (f, \varphi_n) \varphi_n, \quad f \in H,$$

atunci operatorul T se poate pune sub forma

$$T = U \cdot A$$

unde $U: A(H) \rightarrow H$ este un operator parțial izometric.

Operatorul A are drept valori proprii, respectiv funcții proprii, pe $\sqrt{\lambda_n}$, respectiv φ_n ($n = 1, 2, \dots$) și este complet continuu, simetric și pozitiv (vezi, de exemplu [2] cap. I pag. 44).

Notînd $\psi_n = U \varphi_n$ ($n = 1, 2, \dots$), vom arăta că valorile proprii, respectiv funcțiile proprii ale operatorului $T \cdot T^*$ sînt λ_n , respectiv ψ_n ($n = 1, 2, \dots$), iar sistemul $(\psi_n)_n$ este ortonormal.

Într-adevăr

$$\begin{aligned} \psi_n &= U \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} U \sqrt{\lambda_n} \cdot \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} UA \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot T \varphi_n \text{ și} \\ TT^* \psi_n &= TT^* \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} T \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} T (T^* T) \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot T \lambda_n \varphi_n = \\ &= \lambda_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} T \varphi_n = \lambda_n \cdot \psi_n. \end{aligned}$$

Numerele $(\lambda_n)_n$ epuizează valorile proprii ale lui TT^* căci, printr-un raționament asemănător, stabilim că orice valoare proprie a lui TT^* este valoare proprie și pentru T^*T .

Sistemul $(\psi_n)_n$ este ortonormal deoarece, U fiind o izometrie, avem $(\psi_n, \psi_m) = (U \varphi_n, U \varphi_m) = (\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{m,n}$.

În cele ce urmează vom nota $(T)^{-1}(0) = \{h \in H \mid Th = 0\}$.

În condițiile de mai sus avem următoarea

Lema 1. Fie $g \in H$. Condiția necesară și suficientă ca să existe o soluție $\in H$ a ecuației $Tf = g$ este ca

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(g, \psi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \right|^2 < +\infty$$

și

$$(2) \quad g \perp (TT^*)^{-1}(0)$$

Dacă în plus T^*T (sau T) este biunivocă, atunci soluția $f \in H$ este unică, iar dacă TT^* (sau T^*) este biunivocă, atunci (2) este verificată.

Demonstrație. Necesitatea condiției. Deoarece

$$g = Tf = UAf = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (f, \varphi_n) \psi_n,$$

avem

$$(g, \psi_n) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} (f, \varphi_i) \psi_i, \psi_n \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} (f, \varphi_i) \cdot (\psi_i, \psi_n) = \sqrt{\lambda_n} (f, \varphi_n),$$

deci numerele

$$\frac{(g, \psi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} = (f, \varphi_n)$$

sînt coeficienții Fourier ai funcției $f \in H$ și conform inegalității lui Bessel avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(g, \psi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \right|^2 \leq \|f\|^2 < +\infty.$$

Să arătăm acum că $(TT^*)^{-1}(0) = (T^*)^{-1}(0)$. Într-adevăr dacă $TT^*h = 0$, atunci $0 = (TT^*h, h) = \|T^*h\|^2$, deci $T^*h = 0$ și reciproc dacă $T^*h = 0$, atunci $TT^*h = T \cdot 0 = 0$.

Fie acum $h \in (T^*)^{-1}(0)$. Atunci

$$(g, h) = (Tf, h) = (f, T^*h) = (f, 0) = 0$$

și deci este verificată și condiția (2).

Să demonstrăm acum suficiența condiției. Din relația (1) deducem că există

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \psi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \varphi_n \in H$$

și avem

$$\begin{aligned} Tf &= UAf = U \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \psi_n)}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot A\varphi_n \right) = U \left(\sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) \varphi_n \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) U\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) \psi_n, \end{aligned}$$

deoarece A, U sînt continue și $A\varphi_n = \sqrt{\lambda_n} \varphi_n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Dar

$$\begin{aligned} TT^* \left(g - \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) \psi_n \right) &= TT^*g - \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) TT^* \psi_n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (TT^*g, \psi_n) \psi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \psi_n) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (g, TT^* \psi_n) \psi_n - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \psi_n) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (g, \lambda_n \psi_n) \psi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (g, \psi_n) \psi_n = 0. \end{aligned}$$

deci, conform condiției (2) avem :

$$0 = (g, g - \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) \psi_n) = \|g\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n)^2.$$

Atunci

$$\left\| g - \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) \psi_n \right\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n)^2 = 0,$$

deci $g = \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n) \psi_n = Tf$ și prima parte a lemei este demonstrată.

Se verifică ușor, ca mai sus, că $(T^*T)^{-1}(0) = (T)^{-1}(0)$.

Rezultă că dacă T^*T este biunivocă, atunci T este biunivocă, deci soluția $f \in H$ este unică, iar dacă TT^* este biunivocă, atunci T^* este biunivocă și deci $(TT^*)^{-1}(0) = \{0\}$, deci (2) este automat verificată.

Lema 1 este demonstrată.

Notăție. Pentru $g \in H$, fixat, vom nota

$$H[h] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } T^*h = 0 \\ \frac{(g, h)^2}{\|T^*h\|^2} & \text{dacă } T^*h \neq 0. \end{cases}$$

unde $h \in H$.

Avem următoarea

Lema 2. Fie $g \in H$. C condiția necesară și suficientă ca să existe o soluție $f \in H$ a ecuației $Tf = g$, este ca

$$(3) \quad \sup_{h \in H} H[h] < +\infty$$

și

$$(4) \quad g \perp (TT^*)^{-1}(0)$$

În aceste condiții

$$\sup_{h \in H} H[h] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \psi_n)^2}{\lambda_n}.$$

Dacă T^*T este biunivocă, atunci soluția $f \in H$ este unic determinată, iar dacă TT^* este biunivocă, atunci condiția (4) este verificată.

Demonstrație. Necesitatea. Fie $f \in H$ astfel ca $Tf = g$

Conform lemei 1

$$g \perp (TT^*)^{-1}(0) \quad \text{și} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \psi_n)^2}{\lambda_n} < +\infty$$

Să completăm sistemul ortonormal $(\psi_n)_n$ până la o bază ortonormală a lui H , prin familia $\{\psi'_i\}_{i \in I}$. Dacă $h \in H$, vom face notațiile $h_n = (h, \psi_n)$, $g_n = (g, \psi_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) și $h'_i = (h, \psi'_i)$, $i \in I$.

Atunci

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \psi_n + \sum_{i \in I} h'_i \psi'_i \quad \text{și} \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \psi_n \quad (\text{Vezi lema 1}),$$

deci

$$(h, g) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n \psi_n + \sum_{i \in I} h'_i \psi'_i, \sum_{n=1}^{\infty} g_n \psi_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n h_n.$$

$$\|T^*h\| = (TT^*h, h) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n \psi_n, \sum_{n=1}^{\infty} h_n \psi_n + \sum_{i \in I} h'_i \psi'_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n^2$$

deoarece

$$TT^* \psi'_i = \sum_{n=1}^{\infty} (TT^* \psi'_i, \psi_n) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi'_i, TT^* \psi_n) \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\psi'_i, \psi_n) \psi_n = 0$$

(vezi [3] pag. 231).

În concluzie, dacă $\|T^*h\| \neq 0$, avem

$$(5) \quad H[h] = \frac{\left[\sum_{n=1}^{\infty} g_n h_n \right]^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(g, \psi_n)^2}{\lambda_n} < +\infty$$

deoarece din identitatea lui Lagrange rezultă

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} g_n h_n \right]^2 = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\sqrt{\lambda_n}} \cdot h_n \sqrt{\lambda_n} \right]^2 \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\lambda_n} \right] \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n^2 \right].$$

Să demonstrăm suficiența condițiilor. Fie $g \perp (TT^*)^{-1}(0)$ și $M = \sup_{h \in H} H[h] < +\infty$. Fie $h \in H$ așa ca $\|T^*h\| \neq 0$. Avem

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n h_n \right)^2 \leq M \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n h_n^2 \right)$$

Aplicînd această relație elementelor $k_p = \sum_{n=1}^p \frac{g_n}{\lambda_n} \psi_n$ ($p = 1, 2, \dots$),

obținem

$$\left(\sum_{n=1}^p g_n \cdot \frac{g_n}{\lambda_n} \right)^2 \leq M \left(\sum_{n=1}^p \frac{g_n^2}{\lambda_n} \right)$$

adică

$$\sum_{n=1}^p \frac{g_n^2}{\lambda_n} = \sum_{n=1}^p \frac{(g, \psi_n)^2}{\lambda_n} \leq M \quad (p = 1, 2, \dots)$$

deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\lambda_n} \leq M$ este convergentă (cazul $g = 0$ este banal). Comparînd acest rezultat cu relația (5) rezultă

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\lambda_n}.$$

În concluzie, putem aplica lema 1, deci există $f \in H$ astfel încît $Tf = g$. Celelalte afirmații decurg tot din lema 1.

Lema 3. Fie $g \in H$. Dacă $\sup_{h \in H} H[h] < +\infty$ și $g \perp (TT^*)^{-1}(0)$, atunci condiția necesară și suficientă ca H să-și atingă marginea superioară într-un punct $k \in H$ ($\sup_{h \in H} H[h] = H[k]$) este ca să existe $\alpha \in R$ astfel încît $TT^*(\alpha k) = g$.

Demonstrație. Să demonstrăm suficiența condiției.

Fie $k \in H$ astfel încît $TT^*k = g$. Presupunînd că nu sîntem în cazul banal $g = 0$, atunci $\|T^*k\| \neq 0$, căci altfel $T^*k = 0$ ar însemna $TT^*k = g = 0$.

Fie $h \in H$ așa ca $T^*h \neq 0$. Atunci

$$H[h] = \frac{(g, h)^2}{\|T^*h\|^2} = \frac{(TT^*k, h)^2}{\|T^*h\|^2} = \frac{(T^*k, T^*h)^2}{\|T^*h\|^2} \leq \frac{\|T^*k\|^2 \cdot \|T^*h\|^2}{\|T^*h\|^2} = \|T^*k\|^2$$

și $H[k] = \frac{(TT^*k, k)^2}{(TT^*k, k)} = \|T^*k\|^2$, de unde rezultă că

$$\sup_{h \in H} H[h] = H[k]$$

Să demonstrăm necesitatea condiției. Să presupunem că există $k \in H$ astfel încît $\sup_{h \in H} H[h] = H[k]$. Să notăm $k_n = (k, \psi_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Conform lemei 2 avem

$$(6) \quad H[k] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n^2}{\lambda_n}.$$

Din identitatea lui Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^p \frac{g_i}{\sqrt{\lambda_i}} k_i \sqrt{\lambda_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \left(\frac{g_i}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot k_j \sqrt{\lambda_j} - \frac{g_j}{\sqrt{\lambda_j}} k_i \sqrt{\lambda_i} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^p \frac{g_i^2}{\lambda_i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i k_i^2 \right)$$

și din faptul că seriile $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^2}{\lambda_i}$, $\sum_{i=1}^{\infty} k_i^2 \lambda_i$ și $\sum_{i=1}^{\infty} g_i k_i$ sînt convergente, rezultă că și seria

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\frac{g_i}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot k_j \sqrt{\lambda_j} - \frac{g_j}{\sqrt{\lambda_j}} k_i \sqrt{\lambda_i} \right)^2$$

este convergentă.

Atunci identitatea lui Lagrange se păstrează și la limită, de unde obținem

$$(7) \quad H[k] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^2}{\lambda_i} - \frac{1}{2 \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i k_i^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{\infty} \left(\frac{g_i}{\sqrt{\lambda_i}} k_j \sqrt{\lambda_j} - \frac{g_j}{\sqrt{\lambda_j}} k_i \sqrt{\lambda_i} \right)^2$$

Comparând (6) cu (7) obținem

$$\frac{g_i}{\sqrt{\lambda_i}} \cdot k_j \sqrt{\lambda_j} - \frac{g_j}{\sqrt{\lambda_j}} k_i \sqrt{\lambda_i} = \left| \frac{\frac{g_i}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{g_j}{\sqrt{\lambda_j}}}{k_i \sqrt{\lambda_i} k_j \sqrt{\lambda_j}} \right| = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

Deci există $\alpha \in R$, astfel încît $\alpha k_i \sqrt{\lambda_i} = \frac{g_i}{\sqrt{\lambda_i}}$, deci $k_i = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{g_i}{\lambda_i}$ ($i = 1, 2, \dots$). Cum k_i sînt coeficienții Fourier ai lui $k \in H$, rezultă că

$$\alpha^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^2}{\lambda_i^2} < +\infty, \text{ sau } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i^2}{\lambda_i^2} < +\infty$$

Să observăm că

$$(TT^*)(TT^*)^* \psi_n = (TT^*)(TT^* \psi_n) = \lambda_n^2 \psi_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

deci λ_n^2 și ψ_n sînt valorile proprii, respectiv funcțiile proprii ale lui $(TT^*)(TT^*)^*$. Atunci lema 1 aplicată operatorului TT^* ne spune că ecuația $TT^* f = g$ admite o soluție $f \in H$.

Să observăm de asemenea că

$$(TT^* k, \psi_i) = (k, TT^* \psi_i) = k_i \lambda_i = \frac{1}{\alpha} g_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

deci $TT^* k$ și $\frac{1}{\alpha} g$ au aceiași coeficienți Fourier și deci conform unui raționament făcut în demonstrația lemei 1, rezultă că $TT^* k = \frac{1}{\alpha} g$, adică $TT^*(\alpha k) = g$ și lema este demonstrată.

4. Ecuația lui Fredholm de speța I cu integrală Stieltjes Lebesgue. Analogul teoremei lui Picard și a lui Soula

Fie

a) O funcție monoton crescătoare $s : [a, b] \rightarrow R$.

b) O funcție măsurabilă și de pătrat integrabil în raport cu măsura $|\sigma| \cdot |\sigma| : K : [a, b]^2 \rightarrow R$.

c). $g \in L^2$, L^2 fiind spațiul introdus în §1, iar σ măsura Stieltjes Lebesgue generată de s .

Vom considera ecuația lui Fredholm de speța I cu integrală Stieltjes Lebesgue.

$$(1) \int K(x, y) f(y) d\sigma(y) = g(x), \quad x \in [a, b]$$

și vom căuta condiții de existență și unicitate a soluției $f \in L^2$.

Dacă notăm cu T operatorul lui L^2 definit prin relația :

$$(Tf)(x) = \int K(x, y) f(y) d\sigma(y), \quad x \in [a, b]$$

unde $f \in L^2$, atunci problema pe care am pus-o revine la a găsi condiții de existență și unicitate pentru soluția $f \in L^2$ a ecuației

$$Tf = g$$

Vom trece la rezolvarea problemei.

Deoarece s este monoton crescătoare, $\sigma \equiv |\sigma|$ și produsul scalar a două funcții $h, k \in L^2$ capătă forma

$$(h, k) = \int h(x) k(x) d\sigma(x).$$

Atunci adjunctul operatorului T va fi dat de relația

$$(T^*f)(x) = \int K(y, x) f(y) d\sigma(y), \quad x \in [a, b], f \in L^2,$$

deoarece pentru orice $f, h \in L^2$ avem

$$\begin{aligned} (Tf, h) &= \int (Tf)(x) h(x) d\sigma(x) = \\ &= \int \left(\int K(x, y) f(y) d\sigma(y) \right) h(x) d\sigma(x) = \\ &= \int \left(\int K(x, y) h(x) d\sigma(x) \right) f(y) d\sigma(y) = (f, T^*h). \end{aligned}$$

Se vede ușor că dacă facem notațiile

$$\overline{K}(x, y) = \int K(z, x) K(z, y) d\sigma(z),$$

$$\underline{K}(x, y) = \int K(x, z) K(y, z) d\sigma(z),$$

atunci avem pentru $f \in L^2$

$$(T^*Tf)(x) = \int \overline{K}(x, y) f(y) d\sigma(y),$$

$$(TT^*f)(x) = \int \underline{K}(x, y) f(y) d\sigma(y), \quad x \in [a, b]$$

De asemenea funcția H introdusă în § 3 capătă forma

$$\begin{aligned} H[h] &= \frac{(\int h(x) g(x) d\sigma(x))^2}{\int (\int \underline{K}(x, y) h(y) d\sigma(y)) h(x) d\sigma(x)} = \\ &= \frac{(\int h(x) g(x) d\sigma(x))^2}{\int (\int K(x, y) h(x) d\sigma(x))^2 d\sigma(y)}. \end{aligned}$$

dacă $\|T^*h\|^2 = (TT^*h, h) \neq 0$.

În § 2 am arătat că T este un operator complet continuu al spațiului Hilbert L^2 . Vom putea deci aplica acestui operator toate rezultatele stabilite în § 3. Rezultă că există un sistem ortonormal de funcții proprii $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ corespunzător valorilor proprii $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ale operatorului T^*T

$$T^*T \varphi_n = \lambda_n \varphi_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Vom nota cu ψ_n ($n = 1, 2, \dots$) funcțiile proprii ale operatorului TT^* , date de relațiile

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (T\varphi_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int K(x, y) \varphi_n(y) d\sigma(y) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Aplicînd lema 1 § 3, obținem

Teorema 1 (Analogul teoremei lui Picard)*. *Condiția necesară și suficientă ca să existe o soluție $f \in L^2$ a ecuației (1) este ca*

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int g(x) \psi_n(x) d\sigma(x) \right)^2 < +\infty$$

și

$$(3) g \perp (TT^*)^{-1}(0)$$

*Dacă în plus T^*T este biunivocă, atunci soluția este unică, iar dacă $T \cdot T^*$ biunivocă, atunci condiția (3) este verificată.*

Aplicînd lema 2 § 3, obținem

Teorema 2 (Analogul teoremei lui Soula)*. *Condiția necesară și suficientă ca să existe o soluție $f \in L^2$ a ecuației (1) este ca*

$$(4) \sup_{h \in L^2} \frac{(\int h g d\sigma)^2}{\int (\int K(x, y) h(x) d\sigma(x))^2 d\sigma(y)} < +\infty$$

și

$$(5) g \perp (TT^*)^{-1}(0)$$

*Dacă în plus T^*T este biunivocă, atunci soluția este unică, iar dacă TT^* este biunivocă, atunci condiția (5) este verificată.*

În enunț am făcut convenția ca fracției ce apare în condiția (4) să-i dăm valoarea zero dacă numitorul se anulează, convenție justificată de faptul că în acest caz $\|T^*h\| = 0$, deci $T^*h = 0$ și deci, conform condiției (5) și numărătorul (h, g) se anulează.

Aplicînd lema 3 § 3, obținem

Teorema 3. *Dacă condițiile (4) și (5) din teorema 2 sînt verificate, atunci condiția necesară și suficientă ca*

$$H[h] = \frac{(\int h(x) g(x) d\sigma(x))^2}{\int (\int K(x, y) h(x) d\sigma(x))^2 d\sigma(y)}$$

* Vezi [4] pag. 87.

* Vezi [5] pag. 20.

să-și atingă marginea superioară în L^2 este ca să existe o soluție $f \in L^2$ a ecuației

$$\int_a^b K(x, y) f(y) d\sigma(y) = g(x), \quad x \in [a, b].$$

Observație. Dacă funcția s este presupusă numai cu variație mărginită, lemele 1, 2 din 3 transcrise fără nici o modificare pentru operatorul T definit de relația

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) d\sigma(y), \quad f \in L^2$$

ne dau condiții necesare și suficiente de existență a soluției ecuației lui Fredholm de speța I cu integrală Stieltjes-Lebesgue sub forma cea mai generală

$$\int_a^b K(x, y) f(y) d\sigma(y) = g(x), \quad x \in [a, b]$$

precum și condiții suficiente de unicitate a soluției. Aceasta deoarece am demonstrat în 1 și 2 că T este un operator complet continuu al spațiului Hilbert L^2 .

Deosebirea față de rezultatele expuse în teoremele 1, 2, 3 din prezentul paragraf constă în faptul că în cazul general nu putem găsi o expresie integrală pentru adjunctul operatorului T , cum se întâmplă în cazul cînd funcția s este monotonă.

5. Aplicație la sistemele de ecuații lineare cu o infinitate de necunoscute

Fie $s: [a, b] \rightarrow R$ o funcție de salturi monotn crescătoare, cu punctele de salt $\{\alpha_n, n = 1, 2, \dots\}$ formînd un șir crescător:

$$a < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \dots < b$$

Să observăm că s este continuă în punctul $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Vom nota salturile lui s cu:

$$V_n = s(\alpha_n + 0) - s(\alpha_n - 0) > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Mulțimile $\{\alpha_n\}$, (α_n, α_{n+1}) ($n = 1, 2, \dots$), $[a, \alpha_1]$, $[\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n, b]$ sînt măsurabile Stieltjes Lebesgue și au măsurile:

$$\sigma[\{\alpha_n\}] = V_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\sigma[(\alpha_n, \alpha_{n+1})] = \sigma[[a, \alpha_1]] = \sigma[[\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n, b]] = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vom verifica numai prima dintre proprietăți, celelalte verificîndu-se în mod asemănător. Avem:

$$\sigma[\{\alpha_n\}] = \lim_{p \rightarrow \infty} (s(\beta_p) - s(\gamma_p)) = s(\alpha_n + 0) - s(\alpha_n - 0) = V_n$$

unde

$$\beta_p < \alpha_n < \gamma_p \text{ și } \lim_{p \rightarrow \infty} \beta_p = \lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_p = \alpha_n \text{ (Vezi [1], § 5)}$$

Vom arăta acum că orice mulțime $A \subseteq [a, b]$ este măsurabilă și $\sigma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A \cap \{\alpha_n\}) = \sum_{\alpha_n \in A} V_n$

Această afirmație rezultă din descompunerea lui A ,

$$A = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{\alpha_n\}) \right\} \cup \{A \cap [\alpha, \alpha_1]\} \cup \{A \cap [\alpha, b]\} \cup \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap (\alpha_n, \alpha_{n+1})) \right\}$$

într-o reuniune cel mult numărabilă de mulțimi măsurabile și disjuncte, dintre care singurele care au măsura nenulă sînt mulțimile din prima acoladă, pentru care $A \cap \{\alpha_n\} = \{\alpha_n\}$.

Ca o consecință a acestui fapt, orice funcție $f: [a, b] \rightarrow \bar{R}$ este măsurabilă.

Două funcții $f, g: [a, b] \rightarrow \bar{R}$ sînt egale aproape peste tot, dacă

$$\sigma(\{x; f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

deci dacă și numai dacă $f(x) = g(x)$ pentru $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$

Integrala unei funcții sumabile $f: [a, b] \rightarrow \bar{R}$ este

$$\begin{aligned} \int f d\sigma &= \int_{[a, \alpha_1]} f d\sigma + \int_{[\alpha, b]} f d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\alpha_n, \alpha_{n+1})} f d\sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\alpha_n\}} f d\sigma = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{\alpha_n\}} f(\alpha_n) d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} f(\alpha_n) \sigma(\{\alpha_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\alpha_n) V_n. \end{aligned}$$

Să notăm cu L^2 spațiul Hilbert al claselor de funcții f de pătrat sumabil, deci pentru care $\sum_{n=1}^{\infty} f^2(\alpha_n) \cdot V_n < +\infty$ și cu l_2 spațiul lui Hilbert

al șirurilor numerice $X = (X_n)_{n \in N}$ pentru care $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 < +\infty$.

Aplicația $F: L^2 \rightarrow l_2$ definită prin relația

$$f \in L^2, F(f) = (f(\alpha_n) \sqrt{V_n})_{n \in N} \in l_2$$

este un izomorfism de spații Hilbert.

Într-adevăr, se vede ușor că este lineară, biunivocă și pe. Ea păstrează și produsul scalar, deoarece dacă $F(f) = X$ și $F(g) = Y$, cu $f, g \in L^2$, atunci

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int fg d\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} f(\alpha_n) g(\alpha_n) V_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(\alpha_n) \sqrt{V_n} g(\alpha_n) \sqrt{V_n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot Y_n = (X, Y). \end{aligned}$$

Unei funcții $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de pătrat sumabil, vom face să-i corespundă un șir dublu $(A_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ cu $\sum_{i, j=1}^{\infty} A_{ij}^2 < +\infty$ și reciproc prin relațiile

$$A_{ij} = K(\alpha_i, \alpha_j) \sqrt{V_i V_j}, \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

Avem :

$$\begin{aligned} \iint K^2(x, y) d\sigma(x) d\sigma(y) &= \int \left(\sum_{i=1}^{\infty} K^2(\alpha_i, y) V_i \right) d\sigma(y) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} K^2(\alpha_i, \alpha_j) V_i \right) V_j = \sum_{i, j=1}^{\infty} A_{ij}^2. \end{aligned}$$

Se verifică ușor că :

$$(Tf)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K(x, \alpha_n) f(\alpha_n) V_n$$

$$(T^*f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K(\alpha_n, x) f(\alpha_n) V_n, \quad f \in L^2$$

De asemenea dacă $f, g \in L^2$ și $X = F(f)$, $B = F(g)$, atunci

$$\begin{aligned} H[f] &= \frac{(f, g)^2}{\|T^*f\|^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i B_i \right)^2}{\int (T^*f)^2 d\sigma} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i B_i \right)^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} K(\alpha_i, \alpha_j) f(\alpha_i) V_i \right)^2 V_j} = \\ &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i B_i \right)^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} X_i \right)^2}, \quad (\text{în ipoteza } \|T^*f\| \neq 0). \end{aligned}$$

Teorema 1. Fie $B = (B_n)_n \in l_2$ și $A = (A_{ij})_{i, j \in \mathbb{N}}$ astfel ca

$$\sum_{i, j=1}^{\infty} A_{ij}^2 < +\infty.$$

Condiția necesară și suficientă ca să existe o soluție $X = (X_n)_n \in l_2$ a sistemului linear și infinit de ecuații

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} X_j = B_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

este ca

$$\sup_{(Y_n)_n \in l_2} \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} Y_i B_i \right)^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} Y_i \right)^2} < +\infty \quad (2)$$

și B să verifice

$$\sum_{i=1}^{\infty} Y_i B_i = 0 \text{ pentru toți } Y \in l_2 \text{ pentru care} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} Y_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Dacă în plus $\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} Y_j = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) numai pentru $Y = 0$, atunci soluția sistemului (1) este unic determinată.

Observație. Condiția (3) este automat satisfăcută dacă presupunem că $\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} Y_i = 0$ ($j = 1, 2, \dots$) numai pentru $Y = 0$.

Teorema 2. Dacă condițiile (2) și (3) din teorema precedentă sînt verificate, atunci condiția necesară și suficientă ca

$$H[X] = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i B_i \right)^2}{\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} X_i \right)^2} \quad (4)$$

să-și atingă marginea superioară într-un punct $X = (X_n)_n \in l_2$, este ca sistemul de ecuații :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_{ik} A_{jk} \right) Y_j = B_i \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

să admită o soluție $Y = (Y_n)_n \in l_2$.

Demonstrația teoremelor 1 și 2. Fie $g = F^{-1}(B)$ și o funcție $K : [a, b]^2 \rightarrow \bar{R}$ corespunzătoare șirului dublu $A = (A_{ij})_{i,j \in N}$.

Dacă $X = (X_n)_n$ și $Y = (Y_n)_n$ aparțin lui l_2 , să notăm $f = F^{-1}(X)$, $h = F^{-1}(Y)$.

Se verifică ușor următoarele afirmații :

a). Sistemul (1) este echivalent cu ecuația

$$\int K(x, y) f(y) d\sigma(y) = g(x).$$

b). $H[f] = H[X]$, unde $H[X]$ este dat de (4).

c). Condiția (3) este echivalentă cu afirmația „ g este ortogonală mulțimii $\{h \in L^2; TT^* h = 0\}$ ”.

- d). T^*T este biunivocă dacă și numai dacă $\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} Y_j = 0$
 ($i = 1, 2, \dots$) numai pentru $Y = 0$.
 e). TT^* este biunivocă dacă și numai dacă

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} Y_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots) \text{ numai pentru } Y = 0.$$

f). Sistemul de ecuații (5) este echivalent cu ecuația $TT^*h = g$.
 Noi vom verifica numai punctele c) și d).

Punctul c):

Să presupunem (3) îndeplinită și fie $h \in L^2$ așa ca $TT^*h = 0$.

Atunci din relația $(TT^*h, h) = \|T^*h\|^2 = 0$ rezultă că $T^*h = 0$,

adică $\sum_{i=1}^{\infty} K(\alpha_i, \alpha_j) h(\alpha_i) V_i V_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots$) sau

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} Y_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$$

deci conform cu (3) $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i B_i = 0 = (h, g)$.

Reciproc, dacă $\sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} Y_i = 0$ ($j = 1, 2, \dots$), atunci $T^*h = 0$ deci

$TT^*h = TO = 0$ și deci $(g, h) = 0$, ceea ce echivalează cu $\sum_{i=1}^{\infty} Y_i B_i = 0$.

Punctul d):

T^*T este biunivocă dacă și numai dacă T este biunivocă.

Într-adevăr $T^*Th = 0$ dacă și numai dacă $Th = 0$, căci $T^*Th = 0$ implică $(T^*Th, h) = \|Th\|^2 = 0$ deci $Th = 0$ și $Th = 0$ implică $T^*Th = TO = 0$.

Biunivocitatea lui T echivalează cu afirmația $\int K(x, y) h(y) d\sigma(y) = 0$ numai pentru $h = 0$, care echivalează cu afirmația $\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} Y_j = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) numai pentru $Y = 0$, deoarece $\int K(x, y) h(y) d\sigma(y) = \sum_{j=1}^{\infty} K(x, \alpha_j) Y_j$.

În concluzie, folosind teoremele 2 și 3 din 3 și echivalențele stabilite, obținem rezultatele enunțate în teoremele 1 și 2 din acest paragraf.

Remarcă. La un rezultat asemănător cu teorema nr. 1 din prezentul paragraf a ajuns F. Riesz, utilizând o metodă directă de demonstrație.

Rezultatul este următorul (transpus pentru l_2): presupunînd că $\sum_{j=1}^{\infty} A_{ij}^2 <$

$< +\infty$ ($i = 1, 2, \dots$), condiția necesară și suficientă ca sistemul (1) să admită cel puțin o soluție $X = (X_n)_n$ astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2 < M^2$ este ca inegalitatea

$$\left| \sum_{i=1}^n \mu_i B_i \right| \leq M \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^n A_{ij} \mu_i \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

să aibă loc oricare ar fi $n \in N$ și oricare ar fi numerele reale sau nu μ_i (Vezi [6] pag. 895).

BIBLIOGRAFIE

1. Э. Камке; Интеграл Лебега-Стилтьеса, Москва, 1959.
2. Гельфанд и Виленкин; Обобщенные функции, выпуск 4, Москва, 1961
3. F. Riesz et B. Nagy: Lecons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1953.
4. T. Lalescu: Introducere la teoria ecuațiilor integrale, Academia R.P.R., 1956.
5. Mémorial des sciences mathématiques, fasc. LXXX, 1936.
6. F. Riesz: Oeuvres complètes II, Budapest, 1960.

УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА С ИНТЕГРАЛАМИ ЛЕБЕГА-СТИЛТЬЕСА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В работе указываются необходимые и достаточные условия существования и единственности решения f интегрального уравнения

$$\int_a^b K(x, y) f(y) d\sigma(y) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

аналогичные теоремам Пикара и Сулы: функции

$$f: [a, b] \rightarrow \bar{R}, \quad g: [a, b] \rightarrow \bar{R}$$

и

$$K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \bar{R}$$

предполагаются измеримыми в сравнении с обобщенной мерой Стильтьеса Лебега σ , соответственно $\sigma \times \sigma$, и интегрируемого с квадратом.

В заключение эти результаты применяются к системам линейных уравнений с бесконечным числом неизвестных.

ÉQUATIONS FREDHOLM DE PREMIÈRE ESPÈCE AVEC INTÉGRALES STIELTJES LEBESGUE

R É S U M É

L'ouvrage comprend des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité de la solution f de l'équation intégrale

$$\int_a^b K(x, y) f(y) d\sigma(y) = g(x), \quad x \in [a, b],$$

analogue aux théorèmes de Picard et Soula, ou les fonctions

$$f: [a, b] \rightarrow \overline{R}, \quad g: [a, b] \rightarrow \overline{R}$$

et

$$K: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \overline{R}$$

sont présumés mesurables en rapport avec la mesure généralisé Stieltjes Lebesgue σ , respectivement $\sigma \times \sigma$ et de carré intégrable.

Comme conclusion, on applique ces résultats aux systèmes d'équations linéaires avec une infinité d'inconnus.

O PROBLEMĂ DE STATISTICĂ MATEMATICĂ CU APLICAȚIE ÎN PRODUCȚIE

D. FIRESCU și G. THEILER

1. Să presupunem că o întreprindere oarecare cumpără un număr de mașini pentru a fi utilizate în procesul de producție. Se pune problema ca prețul de cost al mașinilor cumpărate de întreprindere să fie recuperat în întregime de aceasta împreună cu cheltuielile legate de procesul de producție respectiv. În vederea atingerii acestui obiectiv intervin diferite caracteristici numerice despre care ne vom ocupa în continuare. Transpunerea matematică a acestora cu ajutorul metodelor probabilistico-statistice cere cunoștințe specifice problemelor studiate, arătând cazurile în care operații de tipul celor descrise mai jos sînt justificate.

Caracteristicile numerice de considerat sînt :

1°. Numărul mașinilor care nu sînt scoase din uz la începutul fiecărei unități de timp ($t = 1, 2, \dots$), pornind de la un număr determinat de mașini (în stare de funcționare) la momentul inițial. Astfel, dacă la momentul inițial sînt l_0 mașini, iar la începutul unității de timp t sînt l_t mașini care nu sînt scoase din uz, atunci valorile caracteristicii corespunzătoare se exprimă prin succesiunea

$$l_0, l_1, l_2, \dots, l_t, \dots$$

2°. Numărul de unități de timp standard de funcționare a mașinii în cursul diferitelor unități de timp : t ($t = 1, 2, \dots$). Timpul standard de funcționare a unei mașini este timpul maxim prevăzut pentru utilizarea mașinii în cursul unei unități de timp. Prin unitate de timp standard înțelegem o subunitate dintr-un număr de subunități egale în care s-a împărțit timpul standard. Valorile caracteristicii considerate le exprimăm prin succesiunea

$$n_1, n_2, \dots, n_t, \dots$$

Pentru introducerea elementelor de natură probabilistică, vom considera în locul succesiunii precedente, succesiunea de valori

$$a_1, a_2, \dots, a_t, \dots$$

unde $a_t = n_t/n_0$ ($t = 1, 2, \dots$), iar n_0 fiind numărul unităților de timp standard de utilizare maximă a mașinii, dacă ea ar funcționa neîntrerupt.

3°. Numărul unităților piese prelucrate pe unitatea de timp pe care-l notăm cu A.

4°. Valoarea medie a costului unei unități piese prelucrate în cursul diferitelor unități de timp t ($t = 1, 2, \dots$), ținând seama de nivelul tehnic al industriei din perioada corespunzătoare, adică ținând seama de uzura morală a mașinilor. Valorile caracteristicii respective le vom exprima prin succesiunea

$$c_1, c_2, \dots, c_t, \dots$$

care se poate înlocui prin succesiunea de valori

$$c_0(1 - b_1), c_0(1 - b_2), \dots, c_0(1 - b_t), \dots$$

unde $b_t = (c_0 - c_t)/c_0$ ($t = 1, 2, \dots$) sînt coeficienții de uzură morală ai mașinii, iar c_0 fiind valoarea medie pe industrie a unei unități piese prelucrate la momentul inițial.

5°. Valorile medii ale numărului de reparații ale unei mașini în cursul diferitelor unități de timp t ($t = 1, 2, \dots$), pe care le vom exprima prin succesiunea

$$r_1, r_2, \dots, r_t, \dots$$

6°. Valorile medii pe industrie ale costului unei reparații în cursul diferitelor unități de timp t ($t = 1, 2, \dots$), adică succesiunea de valori

$$C_1, C_2, \dots, C_t, \dots$$

2. În scopul rezolvării problemei propuse, adică a estimării prețului maxim de cost pe care ar trebui să-l aibă un tip determinat de mașină, este necesar să se stabilească, pe baza datelor experimentale, valorile teoretice corespunzătoare caracteristicilor de natură aleatoare. Dacă, referitor la aceste caracteristici, presupunem existența unei stabilități statistice care să permită folosirea metodelor probabilistico-statistice, avem de considerat următoarele:

1°. Legea de probabilitate relativ la durata întreagă de funcționare a mașinii, dată de succesiunea de probabilități

$$p_1, p_2, \dots, p_t, \dots,$$

unde p_t reprezintă probabilitatea ca o mașină intrată în stare de funcționare la momentul inițial, să nu fie scoasă din uz la începutul unității de timp t (ceea ce nu implică ca mașina să nu fi suferit între timp anumite reparații sau să nu fie în curs de reparație).

Rezultă deci că dacă L_0 este numărul teoretic de mașini (în stare de funcționare) la momentul inițial, atunci numărul probabil L_t de mașini care nu sînt scoase din uz la începutul unității de timp t este

$$L_t = L_0 p_t.$$

Prin urmare, avem de considerat succesiunea de valori

$$L_0, L_1, L_2, \dots, L_t, \dots$$

2°. Legea de probabilitate relativ la funcționarea sau nu a unei mașini pe unitatea de timp standard din cursul unei unități de timp, dată de succesiunea de probabilități

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t, \dots$$

3°. Valorile probabile ale numărului de reparații ale unei mașini în cursul diferitelor unități de timp t ($t = 1, 2, \dots$), date de succesiunea

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t, \dots,$$

unde $\rho_t = \sum_k k p_t^{(k)}$ fiind probabilitatea ca o mașină să fie scoasă din uz în cursul unității de timp t și să fi suferit în cursul acestei unități de timp k reparații.

Deosebit de elementele de mai sus cu caracter probabilistic, trebuie să menționăm că unele din caracteristicile considerate la punctul precedent (1—4° și 1—6°) nu prezintă un element determinat probabilistic, ele putînd fi apreciate pe baza experienței căpătate în dezvoltarea tehnicii și a producției industriale. De aceea, caracteristicile respective rămîn astfel cum s-au precizat acolo (1—4° și 1—6°).

3. În vederea estimării prețului maxim de cost, trebuie în prealabil să determinăm *perioada critică a mașinii*, adică perioada începînd de la care mașina nu mai este rentabilă. Cu alte cuvinte, este vorba de a determina perioada începînd de la care valoarea medie a costului reparațiilor mașinii în cursul acelei perioade devine mai mare față de valoarea prelucrărilor efectuate de mașină în cursul aceleiași perioade. Este de la sine înțeles că, în practică, perioada critică a mașinii va corespunde unității de timp considerate (an, semestru etc.)

Rezultă deci că perioada critică τ verifică inegalitățile

$$Ap_{\tau-1} \alpha_{\tau-1} c_0 (1 - b_{\tau-1}) < C_{\tau-1} \rho_{\tau-1} + s_{\tau-1}$$

și

$$Ap_{\tau} \alpha_{\tau} c_0 (1 - b_{\tau}) > C_{\tau} \rho_{\tau} + s_{\tau},$$

unde s_t ($s_t \geq 0$) reprezintă venitul minimal pe care ar trebui să-l realizeze mașina pentru a putea să fie folosită. Am considerat în general pe s_t ca funcție de t , cazul cel mai simplu fiind desigur acela în care $s_t = s = \text{const.}$

Estimarea prețului maxim de cost al mașinii se obține acum imediat. Într-adevăr, dacă notăm cu δ și ε fracțiunile din acest preț de cost, care reprezintă respectiv cheltuielile și beneficiile legate de operațiile de prelucrare a mașinii, atunci prețul maxim de cost c este dat de relația

$$c(1 + \delta + \varepsilon) = Ac_0 \sum_{t=0}^{\tau-1} v^{t+1/2} p_t \alpha_t (1 - b_t) - \sum_{t=0}^{\tau-1} v^t C_t \rho_t + v^{\tau} R,$$

unde R reprezintă valoarea mașinii scoasă din starea de funcționare (rebut), adică valoarea mașinii la începutul perioadei sale critice, iar v^k fiind factorul de actualizare.

4. Până aici, am prezentat un mod de rezolvare a problemei privind determinarea prețului de cost pe care ar trebui să nu-l depășească o mașină pentru a fi rentabilă. Cele expuse mai sus au drept scop să atragă atenția asupra unuia din modurile posibile în care poate fi abordată problema. O analiză mai adâncită ar putea eventual conduce la soluții mai bune ale problemei; de aceea, în cele ce urmează, vom analiza unele aspecte ale problemei pe care le-am prezentat destul de sumar mai sus.

Punctul de plecare pentru rezolvarea problemei sînt datele experimentale pe baza cărora se obțin frecvențele corespunzătoare, care diferă evident de la o serie de experiențe la alta. Pentru acest motiv, datele experimentale trebuie privite cu anumită prudență în ceea ce privește folosirea lor la estimarea caracteristicilor respective. Aplicarea Teoriei probabilităților și Statisticii matematice se bazează tocmai pe stabilitatea frecvențelor cu ajutorul cărora urmează să se estimeze probabilitățile necunoscute. Cunoașterea acestor probabilități permit să se aprecieze abaterile față de valorile medii și deci să se stabilească mai just prețul de cost.

Ne vom opri acum asupra posibilității de a cunoaște legea de probabilitate relativ la durata întreagă de funcționare a mașinii folosind frecvențele. Determinarea legii de probabilitate respective înseamnă cunoașterea probabilității $p(t)$, care reprezintă astfel probabilitatea ca o mașină intrată în stare de funcționare la momentul inițial, să nu fie scoasă din uz la momentul t (avem evident $p(0) = 1$).

Ar fi dorit să determinăm probabilitățile $p(t)$ direct cu ajutorul frecvențelor cunoscute. Acest lucru, însă, rareori este posibil de realizat, deoarece valorile întregi ale variabilei t ($t = 1, 2, \dots$) — cum este cazul de față al frecvențelor corespunzătoare unității de timp alese (an, semestru etc.) — nu permit determinarea cu suficientă precizie a funcției $p(t)$. De aceea, problema trebuie studiată prin considerarea frecvențelor referitoare unor intervale mici de timp pentru a putea să descoperim caracteristicile specifice ale fenomenului observat. În felul acesta, am putea fi astfel conduși la cunoașterea unor particularități, care ar permite — cu excepția unor parametri — de a stabili legea de probabilitate respectivă. Teoretic, problema se prezintă în modul următor:

Pe baza frecvențelor referitoare unor intervale mici de timp, considerînd mărimi de forma

$$\frac{l_t - l_{t+\Delta t}}{\Delta t \cdot l_t},$$

se intuiește că limita expresiei teoretice corespunzătoare, adică limita expresiei

$$\frac{p(t) - p(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot p(t)},$$

pentru $\Delta t \rightarrow 0$, este o funcție continuă $f(t)$ de o anumită formă, cu ajutorul

căreia se poate apoi determina funcția $p(t)$. Într-adevăr, presupunând că funcția $p(t)$ este derivabilă, putem să scriem

$$\frac{p(t) - p(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot p(t)} = - \frac{p'(t + \theta \Delta t)}{p(t)} \quad (0 < \theta < 1),$$

de unde, făcând $\Delta t \rightarrow 0$ și presupunând în plus că funcția $p'(t)$ este continuă, obținem

$$-\frac{p'(t)}{p(t)} = f(t).$$

De aici rezultă

$$p(t) = Ke^{-\int_0^t f(u) du}$$

sau, ținând seama că $p(0) = 1$, deducem

$$p(t) = e^{-\int_0^t f(u) du}$$

Pentru ca problema să fie complet rezolvată, ar trebui ca mulțimea valorilor lui $p(t)$ să fie cât mai apropiată de mulțimea frecvențelor cunoscute. Acest lucru se poate realiza, de exemplu, aplicând metoda celor mai mici pătrate. Pe de altă parte, trebuie să subliniem că atunci când spunem că $f(t)$ este o funcție de o anumită formă, aceasta nu înseamnă că parametrii care intervin în expresia funcției $f(t)$ sînt bine determinați. Folosind un grup de valori ale lui t , se obțin anumite valori pentru parametrii, folosind alt grup de valori ale lui t , se obțin alte valori pentru parametrii etc. Ceea ce determină alegerea funcției $f(t)$, este tocmai faptul că valorile obținute pentru parametrii diferă puțin de la un grup de valori ale lui t la alt grup. În orice caz, alegerea optimă a parametrilor trebuie să se sprijine pe totalitatea datelor de observație și aceasta se realizează — după cum am mai arătat — aplicînd, de exemplu, metoda celor mai mici pătrate. Rezultatul la care se ajunge, trebuie neapărat verificat pe baza observațiilor existente (de preferință însă, pe baza altor observații) cu ajutorul testelor de verificare a ipotezelor statistice și numai după aceea, se poate afirma, dacă s-a găsit într-adevăr o lege de probabilitate.

În încheierea acestui punct ne vom opri asupra unor modalități practice care duc la descoperirea formei funcției $f(t)$, precum și asupra unui test de verificare a ipotezelor statistice, potrivit specificului problemei examinate. După cum am văzut mai înainte, punctul de plecare este analiza concretă a mărimilor de forma

$$\frac{l_t - l_{t + \Delta t}}{\Delta t \cdot l_t}.$$

Dacă mărimile corespunzătoare sînt aproximativ constante, atunci avem motiv să presupunem că

$$f(t) = f = \text{const.}$$

și problema revine deci — conform celor arătate mai sus — la determinarea acestor constante. S-ar putea ca mărimile obținute să nu se prezinte aproximativ constante, dar diferențele lor succesive de ordinul întâi să fie aproximativ constante. În acest caz — după cum se constată imediat — este de așteptat ca funcția $f(t)$ să fie de forma

$$f(t) = a + bt.$$

În sfârșit, s-ar putea întâmpla — așa cum a fost cazul în unele probleme de biometrie — ca aceste diferențe să nu fie aproximativ constante, dar în schimb rapoartele lor succesive să fie aproximativ constante. În cazul considerat, se observă că funcția $f(t)$ este de forma

$$f(t) = a + bc^t.$$

Cele de mai sus sînt suficiente pentru a ilustra cum se întrevede forma funcției $f(t)$ și cum intervin în expresia ei parametrii care urmează să fie estimați. În același timp, se vede cum nu întotdeauna este posibil de a porni de la anumite legi de probabilitate care au fost studiate mai mult, ci însăși problema concretă conduce la legi de probabilitate noi, prezentînd importanță pentru anumite tipuri de probleme.

Considerațiile făcute aici rămîn valabile și în ceea ce privește valorile teoretice menționate la punctul 2 ($2-2^\circ$ și $2-3^\circ$).

După ce s-a descoperit legea de probabilitate, se pune acum problema verificării ipotezei statistice că un grup de observații satisface această lege de probabilitate. Aici, dat fiind specificul problemei, se poate aplica criteriul de statistică neparametrică a lui Kolmogorov. Într-adevăr, ținînd seama că $p(0) = 1$ și $p(\infty) = 0$, rezultă că funcția de repartiție corespunzătoare este

$$F(t) = 1 - p(t).$$

Pe de altă parte, funcția empirică de repartiție este

$$F_{l_0}(t) = 1 - \frac{l_t}{l_0},$$

astfel încît criteriul lui Kolmogorov se exprimă prin relația asimptotică

$$P_r \left(\sup_t \left| p(t) - \frac{l_t}{l_0} \right| < \frac{\lambda}{\sqrt{l_0}} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}.$$

5. Estimația prețului maxim de cost pe care ar trebui să-l aibă un anumit tip de mașină s-a bazat — după cum s-a arătat la punctul 3 — pe valorile numărului probabil de mașini care nu sînt scoase din uz la începutul diferitelor unități de timp t ($t = 1, 2, \dots$). În realitate însă, există abateri de la aceste valori și deci, problema se pune de a ține seama de efectul lor în calculele respective.

Presupunînd că fiecare mașină funcționează independent de celelalte, problema de față conduce la schema probabilistică realizată de o urnă de tip Bernoulli conținînd bile albe și negre, din care se fac L_0 extracții

successive. Proporția bilelor albe este p_t și deci $1 - p_t$ aceea a bilelor negre. În acest caz, valoarea numărului probabil de bile albe extrase, adică valoarea numărului probabil de mașini care nu sînt scoase din uz la începutul unității de timp t , precum și valoarea abaterii standard corespunzătoare sînt

$$L_t = L_0 p_t$$

respectiv

$$\sigma_t = \sqrt{L_t (1 - p_t)},$$

unde reamintim că L_0 este numărul teoretic de mașini (în stare de funcționare) la momentul inițial, iar p_t probabilitatea ca o mașină intrată în stare de funcționare la momentul inițial să nu fie scoasă din uz la începutul unității de timp t (ceea ce nu implică ca mașina să nu fi suferit între timp anumite reparații sau să nu fie în curs de reparație).

Pentru valori mari ale lui L_0 , repartitia respectivă se apropie de cea normală și deci cu un prag de siguranță exprimat printr-o probabilitate egală cu 0,001, este suficient să considerăm un număr de mașini (care nu sînt scoase din uz la începutul unității de timp t) cuprins în intervalul

$$(L_t - 3\sqrt{L_t (1 - p_t)}, L_t + 3\sqrt{L_t (1 - p_t)}).$$

Rezultă astfel că situația cea mai defavorabilă care trebuie avută în vedere este aceea cînd se consideră un număr de mașini egal cu

$$L_t - 3\sqrt{L_t (1 - p_t)}.$$

În general, însă, va trebui să se țină seama de efectul abaterilor posibile de la valorile numărului probabil de mașini (care nu sînt scoase din uz la începutul diferitelor unități de timp), luate în totalitatea lor. Presupunînd deci că fiecare mașină funcționează independent de celelalte, probleme conduce acum la schema probabilistică realizată de o succesiune de urne de tip Bernoulli

$$U_1, U_2, \dots; U_t, \dots$$

conținînd fiecare bile albe și negre, din care se fac cîte L_0 extracții successive. Proporția bilelor albe este respectiv

$$p_1, p_2, \dots; p_t, \dots$$

și deci

$$1 - p_1, 1 - p_2, \dots, 1 - p_t, \dots$$

aceea a bilelor negre. Prin urmare, valoarea numărului probabil de mașini care nu sînt scoase din uz la începutul diferitelor unități de timp t ($t = 1, 2, \dots$) și aceea a abaterii standard corespunzătoare se pot scrie

$$L_0 \sum_t p_t = \sum_t L_t$$

respectiv

$$\sqrt{L_0 \sum_t p_t (1 - p_t)} = \sqrt{\sum_t L_t (1 - p_t)}.$$

Repartiția limită pentru $L_0 \rightarrow \infty$ după cum se verifică ușor cu ajutorul funcției caracteristice — este o repartiție normală, astfel încît considerațiile făcute în cazul schemei probabilistice realizate de o singură urnă de tip Bernoulli, rămîn valabile și pentru schema probabilistică realizată de o succesiune de urne de același tip Bernoulli.

De asemenea, trebuie să se țină seama și de efectul abaterilor posibile de la valorile numărului probabil de unități de timp standard în decursul diferitelor unități de timp. Dacă notăm cu n , numărul unităților de timp standard în care s-a împărțit timpul standard de funcționare a unei mașini, adică timpul maxim de funcționare a unei mașini în cursul unei unități de timp, atunci numărul unităților de timp standard în cursul unei unități oarecare de timp, poate să ia oricare din valorile

$$0, 1, 2, \dots, n$$

În cazul unității de timp t și în ipoteza că fiecare mașină funcționează independent de celelalte, sîntem conduși la schema probabilistică realizată de o urnă de tip Bernoulli conținînd bile albe și negre, din care se fac n extracții succesive. Proporția bilelor albe este α_t și deci $1 - \alpha_t$ aceea a bilelor negre. Prin urmare, valoarea numărului probabil de bile albe extrase, adică valoarea numărului probabil de unități de timp standard de funcționare a unei mașini în cursul unității de timp t , este $n\alpha_t$. Nu mai insistăm asupra modului cum se stabilește valoarea probabilității α_t . Desigur, ca această schemă probabilistică să poată fi utilizată, trebuie evident ca ea să corespundă unei situații reale.

Cele spuse mai sus sînt bineînțelese valabile, dacă se consideră numai o singură mașină. De fapt însă, la începutul unității de timp se va prezenta un număr de mașini (care nu sînt scoase din uz) în medie egal cu $L_0 p_t$. De aceea, în realitate, ne vom aștepta la abateri de la acest număr, de al căror efect va trebui să ținem seama în calcule. Dacă presupunem acum că la începutul unității de timp t sînt s mașini care nu sînt scoase din uz, atunci numărul unităților de timp standard în cursul unității de timp t pentru toate cele s mașini, poate să ia oricare din valorile

$$0, 1, 2, \dots, ns.$$

Problema astfel pusă — în ipoteza că fiecare mașină funcționează independent de celelalte — conduce la schema probabilistică realizată de două urne V_1 și V_2 de tip Bernoulli, conținînd fiecare bile albe și negre. Proporția bilelor albe din urna V_1 este p_t , iar aceea a bilelor albe din urna V_2 este α_t . Din urna V_1 se fac L_0 extracții succesive și fie s numărul bilelor albe extrase (numărul mașinilor care la începutul unității de timp t nu sînt scoase din uz). Din urna V_2 se fac acum ns extracții succesive și fie r numărul bilelor albe extrase (numărul unităților de timp standard în cursul unității de timp al celor s mașini).

Rezultă deci că probabilitatea de a obține r unități de timp standard în cursul unității de timp t este

$$C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} C_{ns}^r \alpha_t^r (1 - \alpha_t)^{ns-r},$$

astfel încît numărul probabil de unități de timp standard corespunzător se scrie

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{L_0} \sum_{r=0}^{ns} r C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} C_{ns}^r \alpha_t^r (1 - \alpha_t)^{ns-r} = \\ &= \sum_{r=0}^{ns} C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} \sum_{r=0}^{ns} r \frac{ns}{r} \alpha_t^{r-1} C_{ns-1}^{r-1} (1 - \alpha_t)^{(ns-1)-(r-1)} = \\ &= n \alpha_t \sum_{s=0}^{L_0} s C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} = L_0 p_t n \alpha_t, \end{aligned}$$

rezultat care este în concordanță cu situația de față.

În mod analog, funcția caracteristică corespunzătoare schemei probablistice considerate se scrie

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{L_0} \sum_{r=0}^{ns} e^{iur} C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} C_{ns}^r \alpha_t^r (1 - \alpha_t)^{ns-r} = \\ &= \sum_{s=0}^{L_0} C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} \sum_{r=0}^{ns} e^{iur} C_{ns}^r \alpha_t^r (1 - \alpha_t)^{ns-r} = \\ &= \sum_{s=0}^{L_0} C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} (\alpha_t e^{iu} + 1 - \alpha_t)^{ns} = \\ &= \sum_{s=0}^{L_0} C_{L_0}^s (p_t (\alpha_t e^{iu} + 1 - \alpha_t))^s (1 - p_t)^{L_0-s} = \\ &= (p_t (\alpha_t e^{iu} + 1 - \alpha_t) + 1 - p_t)^{L_0} = [(p_t (\alpha_t (e^{iu} - 1) + 1) - 1) + 1]^{L_0} \end{aligned}$$

O dată calculată funcția caracteristică, momentele de diferite ordine se pot acum deduce imediat.

6. Rezultatele de la punctul precedent nu se prezintă sub o formă destul de simplă pentru calcule. De aceea, ne propunem să găsim repartiția limită respectivă pentru $L_0 \rightarrow \infty$, în ipoteza că raportul n/L_0 este suficient de mic. În acest scop, vom considera funcția caracteristică a variabilei normate $(r - L_0 n p_t \alpha_t) / \sqrt{L_0}$, a cărei expresie este

$$\sum_{s=0}^{L_0} \sum_{r=0}^{ns} e^{-iu \frac{r - L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}}} C_{L_0}^s p_t^s (1 - p_t)^{L_0-s} C_{ns}^r \alpha_t^r (1 - \alpha_t)^{ns-r}.$$

Această expresie se poate pune sub o formă mai convenabilă pentru

calculul repartiției limită. Într-adevăr, funcția caracteristică considerată se poate scrie

$$\begin{aligned}
 & e^{-iu \frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}}} \sum_{s=0}^{L_0} C_{L_0}^s p_t^s (1-p_t)^{L_0-s} \sum_{r=0}^{ns} e^{i \frac{u}{\sqrt{L_0}} r} C_{ns}^r \alpha_t^r (1-\alpha_t)^{ns-r} = \\
 & = e^{-iu \frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}}} \sum_{s=0}^{L_0} C_{L_0}^s p_t^s (1-p_t)^{L_0-s} \left(\alpha_t e^{i \frac{u}{\sqrt{L_0}}} + 1 - \alpha_t \right)^{ns} = \\
 & = e^{-\frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}}} \sum_{s=0}^{L_0} C_{L_0}^s \left(p_t \left(\alpha_t e^{i \frac{u}{\sqrt{L_0}}} + 1 - \alpha_t \right)^n + 1 - p_t \right)^s (1-p_t)^{L_0-s} = \\
 & = e^{-\frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}}} \left(p_t \left(\alpha_t e^{i \frac{u}{\sqrt{L_0}}} + 1 - \alpha_t \right)^n + 1 - p_t \right)^{L_0} = \\
 & = e^{-\frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}}} \left(p_t \left(\left(\alpha_t \left(e^{i \frac{u}{\sqrt{L_0}}} - 1 \right) + 1 \right)^n - 1 \right) + 1 \right)^{L_0}.
 \end{aligned}$$

Dacă notăm cu $\varphi(u)$ această funcție caracteristică și aplicăm logaritmul, obținem

$$\begin{aligned}
 \ln \varphi(u) &= -i \frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}} u + L_0 \ln \left(p_t \left(\left(\alpha_t \left(e^{i \frac{u}{\sqrt{L_0}}} - 1 \right) + 1 \right)^n - 1 \right) + 1 \right)^{L_0} = \\
 &= -i \frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}} u + L_0 \ln \left(1 + p_t \left(\left(1 + i \frac{\alpha_t}{\sqrt{L_0}} u - \frac{\alpha_t}{2 L_0} u^2 + \dots \right)^n - 1 \right) \right) = \\
 &= -i \frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}} u + L_0 \ln \left(1 + p_t \left(i \frac{n \alpha_t}{\sqrt{L_0}} u - \frac{n \alpha_t}{2 L_0} (1 + (n-1) \alpha_t) u^2 + \dots \right) \right) = \\
 &= -i \frac{L_0 n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}} u + L_0 \left(i \frac{n p_t \alpha_t}{\sqrt{L_0}} u - \frac{n p_t \alpha_t}{2 L_0} (1 + (n-1) \alpha_t - n p_t \alpha_t) u^2 + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Prin urmare, funcția $\ln \varphi(u)$ se poate scrie sub forma

$$\ln \varphi(u) = - \left(\frac{n p_t \alpha_t}{2} (1 + (n-1) \alpha_t) - \frac{n^2 p_t^2 \alpha_t^2}{2} \right) u^2 + o \left(\frac{1}{\sqrt{L_0}} \right),$$

de unde rezultă că

$$\lim_{L_0 \rightarrow \infty} \ln \varphi(u) = e^{-\frac{n p_t \alpha_t (1 - \alpha_t + n(1-p_t) \alpha_t)}{2} u^2}.$$

Repartiția limită pentru $L_0 \rightarrow \infty$ este deci o repartiție normală cu media 0 și dispersia $n p_t \alpha_t (1 - \alpha_t + n(1-p_t) \alpha_t)$.

Dacă acum am considera repartiții normale de forma celei de mai sus, independente între ele, pentru diferitele unități de timp t ($t = 1, 2, \dots$), atunci evident că repartiția globală, adică repartiția pe toată durata pînă la perioada critică τ ar fi de asemenea o repartiție normală cu valoarea medie zero și dispersia egală cu suma dispersiilor fiecărei repartiții în parte.

În sfîrșit, considerînd sumele referitoare diferitelor eventualități (venituri, cheltuieli de reparație etc.), sîntem conduși — după cum se poate ușor constata — la medii ponderate și la o valoare a riscului matematic în mod corespunzător.

Din cele de mai sus se vede cum se pot aplica metodele statisticii matematice în rezolvarea unor probleme legate de o apreciere rațională a costului maxim care nu ar trebui depășit în producția diferitelor tipuri de mașini pentru prelucrări în serie.

BIBLIOGRAFIE

1. G. K. Kripalani: On a method for estimating cost arrangements for servicing of tractors and inclusion of this cost in the initial purchase price, Sankhya, Series B, Vol 23, Parts 1, 2 and 3, December, 1960, p. 49—54.
2. O. Onicescu și G. Mihoc: Lecții de Statistică Matematică, Editura Tehnică, București, 1958.
3. B.V. Gnedenko: Kurs Teorii Veroiatnostei, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Fiziko-Matematicheskoi Literaturii, Moscva, 1961.

ВОПРОС ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ С ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕМ В ПРОИЗВОДСТВЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В начале данной статьи нам представлен способ разрешения вопроса в связи с определением себестоимости, которая не должна быть превышена данным типом машины таким образом, чтобы таковая сохранила свою полезность. Излагаемый метод основывается на стоимости вероятного числа машин, которые не были устранены, в начале различных единиц времени и целью данного метода является привлечь внимание на один из различных возможных способов подойти к этому вопросу.

В действительности же, существуют отклонения от стоимости вероятного числа машин, которые не были устранены в начале различных единиц, и следовательно, вопрос требует учета их действия. Вопрос, рассматриваемый в этом разрезе — предполагая что каждая машина действует независимо одна от другой — ведёт к вероятностной схеме, осуществляемой при помощи одной или несколькими урнами типа Бернулли с определённым составом. Число извлечений, произведенных из некоторых урн, определено во времени, для других же оно является случайным.

UN PROBLÈME DE STATISTIQUE MATHÉMATIQUE AVEC APPLICATION DANS LA PRODUCTION

RÉSUMÉ

On présente d'abord un mode de résoudre le problème concernant la détermination du prix de coût qu'il ne devrait pas dépasser un certain type de machine pour être utile. La méthode exposée est basée sur les valeurs du nombre probable des machines qui ne sont pas éliminées au commencement des différentes unités de temps, et elle a seulement le but d'attirer l'attention sur un des divers modes possibles d'aborder le problème.

Mais, en réalité, il y a des écarts par rapport aux valeurs de ce nombre probable des machines et par suite, on doit en tenir compte. Le problème ainsi considérée — dans l'hypothèse que chaque machine travaille indépendamment l'une des autres — conduit aux schémas probabilistiques réalisés par une ou plusieurs urnes de type Bernoulli, dont les compositions sont bien déterminées. Le nombre des extractions effectuées par certaines urnes est déterminé, tandis que pour les autres elles sont aléatoires.

ARIPA RECTANGULARĂ ÎN MIȘCAREA TRANSONICĂ NESTAȚIONARĂ

STELIAN TURBATU

1. M. T. LANDAHL studiază [3] problema aripei rectangulare în mișcarea transonică nestaționară, obținând soluția problemei la limită ce apare, în cazul teoriei liniarizate, cu ajutorul unei metode date de K. Schwarzschild [7]. Soluția astfel obținută are forma unei serii infinite, care în anumite condiții converge uniform așa încît primii termeni ai dezvoltării dau în majoritatea cazurilor practice o aproximare foarte bună a fenomenului real.

Altă cale pentru obținerea soluției problemei la limită considerată, a fost dată de R. Timman [9], care reduce problema la limită dată la o problemă Hilbert, obținînd în cele din urmă soluția sub formă unei reprezentări integrale.

În prezenta notă vom da după [1] o soluție asimptotică a problemei la limită, valabilă în cazul cînd frecvența redusă k ia valori mari. Se consideră apoi în soluția astfel obținută, cazurile limită $y = 0$ și $z = 0$. Dacă se consideră că g este independent de y , obținem atunci pentru $y = 0$ o dezvoltare a soluției, al cărui prim termen este tocmai soluția din cazul mișcării plane dată de M. T. Landahl [4]. În cazul $z = 0$ suma primilor termeni în soluția asimptotică dată este soluția problemei la limită din cazul aripei rectangulare semiinfinită [10] multiplicată cu $-\sqrt{2}$. Acest fapt a fost găsit și de M. T. Landahl [3], [4] sub altă formă.

2. Să considerăm o mișcare fără frecare, fără transfer de căldură, izentropică și nestaționară. După cum se știe, mișcarea va fi descrisă în acest caz de un potențial al vitezelor. Teoria micilor perturbații furnizează atunci în domeniul transonic, în cazul mișcării oscilatorii, o ecuație cu derivate parțiale liniară pentru potențialul vitezelor de perturbație [4], care are forma :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - M_\infty^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

M_∞ fiind numărul lui Mach în mișcarea neperturbată. Ecuația (1) este valabilă când

$$k \gg |1 - M|, \quad (2)$$

unde M este numărul lui Mach în mișcarea locală, iar k este frecvența redusă. În cele ce urmează ne vom mărgini la cazul $M_\infty = 1$, așa încât ecuația (1) ia forma :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (3)$$

Fie acum aripa rectangulară ocupînd domeniul $0 \leq x \leq 1$, $|y| \leq 1$ în planul $z = 0$ (Fig. 1), situată într-un curent de aer animat la infinit de viteza U_∞ . Vom alege un sistem de axe de coordonate, astfel încît axa ox să fie paralelă și de același sens cu viteza U_∞ a curentului. Ca și *M. T. Landahl* [4], vom lua $U_\infty = 1$. Variabilele x , y , z cît și celelalte mărimi sînt considerate ca fiind adimensionale. În acest sens, t înseamnă timpul adimensional obținut multiplicînd timpul fizic cu U_∞/b . Aici b este o lungime caracteristică a aripei.

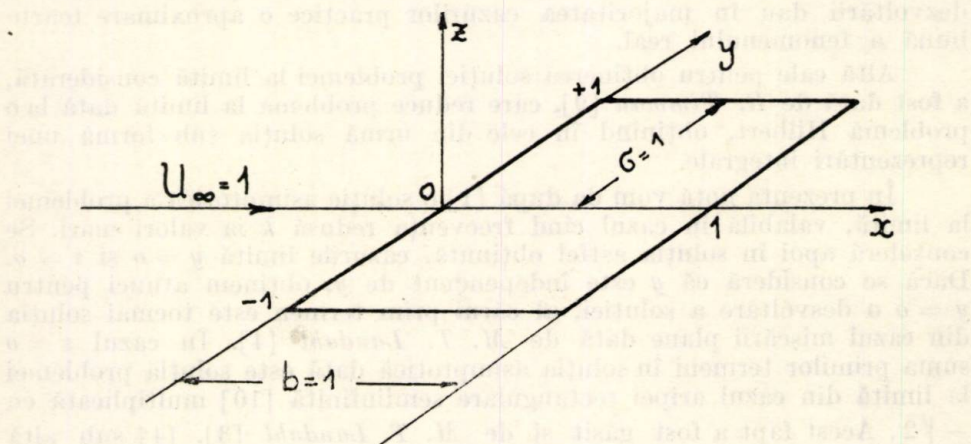


Fig. 1

Aripa fiind plană, condițiile la limită ale problemei au forma [4] :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = h(x, y, t) \quad \text{pe aripă} \quad (4)$$

și

$$\Phi|_{z=0} = 0 \quad \text{exteriorul aripei.} \quad (5)$$

$h(x, y, t)$ este o funcție dată.

Considerînd oscilațiile armonice, vom lua

$$\Phi = \operatorname{Re}\{\varphi(x, y, z) e^{ikt}\} \quad (6)$$

$$h = \operatorname{Re}\{g(x, y) e^{ikt}\}. \quad (7)$$

Introducînd relațiile (6) și (7) în ecuațiile (3), (4) și (5), problema la limită ce o avem de rezolvat, se enunță astfel : Să se găsească o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k^2 \varphi = 0, \quad (8)$$

ce verifică condițiile la limită

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = g(x, y) \quad \text{pentru} \quad 0 < x < 1, |y| < 1 \quad (9)$$

și

$$\varphi|_{z=0} = 0 \quad \text{în exteriorul aripei}. \quad (10)$$

Fie acum transformata Fourier [8] a funcției $\varphi(x, y, z)$ în raport cu x , definită astfel

$$\psi(y, z, s) = F\{\varphi(x, y, z)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y, z) e^{-isx} dx. \quad (11)$$

Inversa formulei (11) este

$$\varphi(x, y, z) = F^{-1}\{\psi(y, z, s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y, z, s) e^{isx} ds. \quad (12)$$

Folosind relațiile (11) și (12), problema la limită definită de ecuațiile (8), (9) și (10) ia forma (Fig. 2) : Să se găsească o soluție a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \lambda^2 \psi = 0, \quad (13)$$

care verifică condițiile la limită

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=0} = G(y, s) \quad \text{pentru} \quad |y| < 1 \quad (14)$$

și

$$\psi|_{z=0} = 0 \quad \text{pentru} \quad |y| \geq 1. \quad (15)$$

Aici

$$\lambda = (2ks + k^2)^{1/2} \quad (16)$$

iar

$$G(y, s) = F\{g(x, y)\}. \quad (17)$$

Vom lua în cele ce urmează $Im(\lambda) > 0$. Presupunem de asemenea că frecvența redusă k are partea imaginară mică și negativă.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \psi = 0 \quad \frac{\psi_z = G}{-1 \quad | \quad 0 \quad +1} \quad \psi = 0 \rightarrow \end{array}$$

Fig. 2

O soluție asimptotică a problemei la limită definită de ecuațiile (13), (14) și (15), în cazul când λ ia valori mari, poate fi dată după [1] sub forma:

$$\begin{aligned} \psi(y, z, s) = & \frac{i}{2} \int_{-1}^1 G(\xi) \left\{ H_0^{(2)}(\lambda r) + \frac{2}{\pi i} \int_{r_1+1+\xi}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\pi i} \int_{r_2-1+\xi}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} + \dots \right\} d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

unde

$$r = r(\xi) = \sqrt{(\xi - y)^2 + z^2} \quad \text{și} \quad r_1 = r(-1), \quad r_2 = r(+1) \quad (19)$$

iar $H_0^{(2)}$ este funcția Hankel de speța două și ordin zero.

Folosind proprietatea de liniaritate a transformatei [Fourier, obținem de la (18) relația

$$\begin{aligned} F^{-1}\{\psi(y, z, s)\} = & F^{-1} \left\{ \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} G(\xi, s) H_0^{(2)}(\lambda r) d\xi \right\} + \\ & + F^{-1} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} G(\xi, s) d\xi \int_{r_1+1+\xi}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \right\} + \\ & + F^{-1} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} G(\xi, s) d\xi \int_{r_2-1+\xi}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \right\} + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

După un calcul relativ ușor, se poate constata că avem relațiile:

$$F^{-1}\{H_0^{(2)}(\lambda r)\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{i}{x} \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x + \frac{r^2}{x} \right) \right] \quad (21)$$

pentru $x > 0$, $Im(k) < 0$, r real și

$$F^{-1}\{G(\xi, s)\} = g(x, \xi) \quad \text{pentru } x > 0, \quad (22)$$

așa încît prin aplicarea teoremei de convoluție găsim

$$\begin{aligned} & F^{-1} \left\{ \frac{i}{2} \int_{-1}^{+1} G(\xi, s) H_0^{(2)}(\lambda r) d\xi \right\} \\ = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} d\xi \int_0^x g(x_1, \xi) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - x_1 + \frac{r^2}{x - x_1} \right) \right] \frac{dx_1}{x - x_1}. \end{aligned} \quad (23)$$

De asemenea, se poate găsi ușor că

$$F^{-1}\{e^{-i\lambda\tau}\} = (i+1) \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{\tau}{x^{3/2}} \exp\left[-i \frac{k}{2} \left(x + \frac{\tau^2}{x}\right)\right] \quad (24)$$

pentru $x > 0$, $Im(k) < 0$ și τ real. Așa fiind, vom obține atunci de la (22) și (24) prin aplicarea teoremei de convoluție relația

$$\begin{aligned} F^{-1}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 G(\xi, s) d\xi \int_{r_1+1+\xi}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\right\} = \\ = \frac{(i+1) \sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x \exp\left[-i \frac{k}{2} (x - x_1)\right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} g(x_1, \xi) d\xi \times \\ \times \int_{r_1+1+\xi}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \exp\left[-i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1}\right] d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Un procedeu analog ca pentru obținerea relației (25) ne dă

$$\begin{aligned} F^{-1}\left\{\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} G(\xi, s) d\xi \int_{r_2-r+\xi}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}}\right\} = \\ = \frac{(i+1) \sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x \exp\left[-i \frac{k}{2} (x - x_1)\right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \times \\ \times \int_{-1}^{+1} g(x_1, \xi) d\xi \int_{r_2-1+\xi}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \exp\left[-i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1}\right] d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

Revenind la relația (20) găsim, ținând cont de (12), (23), (25) și (26), expresia

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = - \frac{1}{2\pi} \int_0^x \exp\left[-i \frac{k}{2} (x - x_1)\right] \frac{dx_1}{x - x_1} \int_{-1}^{+1} g(x_1, \xi) \exp\left[-i \frac{k}{2} \frac{r^2}{x - x_1}\right] d\xi + \frac{(i+1) \sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x \exp\left[-i \frac{k}{2} (x - x_1)\right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} g(x_1, \xi) d\xi \int_{r_1+1+\xi}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \exp\left[-i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1}\right] d\tau + \\ + \frac{(i+1) \sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x \exp\left[-i \frac{k}{2} (x - x_1)\right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} g(x_1, \xi) d\xi \int_{r_2-1+\xi}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - r^2}} \exp\left[-i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1}\right] d\tau + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

Aceasta este soluția problemei la limită definită de ecuațiile (8), (9) și (10), dată sub formă asimptotică. Înlocuind (27) în relația (6), găsim expresia potențialului vitezelor de perturbație căutat.

Pentru $z = 0$ avem de la (27) soluția problemei pe aripă sub forma

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, 0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^x \exp \left[-i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] \frac{dx_1}{x - x_1} \int_{-1}^{+1} g(x_1, \xi) \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} \frac{(\xi - y)^2}{x - x_1} \right] d\xi + \frac{(i+1)\sqrt{k}}{\pi^{3/2}} \int_0^x \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} g(x_1, \xi) d\xi \int_{\xi-y}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi - y)^2}} \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1} \right] d\tau + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Să considerăm acum cazul limită $y = 0$ și g independent de y . În acest caz, relația (27) ne dă

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0, z) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^x \exp \left[-i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] g(x_1) \frac{dx_1}{x - x_1} \int_{-1}^{+1} \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} \frac{\xi^2 + z^2}{x - x_1} \right] d\xi + \frac{(i+1)\sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x g(x_1) \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{\xi+1+\sqrt{1+z^2}}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi^2 + z^2)}} \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1} \right] d\tau + \frac{(i+1)\sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x g(x_1) \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{\xi-1+\sqrt{1+z^2}}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi^2 + z^2)}} \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1} \right] d\tau + \dots \end{aligned} \quad \{29\}$$

Să notăm cu $\varphi^{(1)}$ expresia

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^x \exp \left[-i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] g(x_1) \frac{dx_1}{x - x_1} \int_{-1}^{+1} \exp \left[- \right. \\ & \left. - i \frac{k}{2} \frac{\xi^2 + z^2}{x - x_1} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (30)$$

care se mai poate scrie încă sub forma

$$\varphi^{(1)} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^x \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - x_1 + \frac{z^2}{x - x_1} \right) \right] g(x_1) \frac{dx_1}{x - x_1} \int_{-1}^{+1} \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{\xi^2}{x - x_1} \right] d\xi. \quad (31)$$

După [5] avem

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{\xi^2}{x - x_1} \right] d\xi = \\ & = \sqrt{\frac{2\pi(x - x_1)}{ik}} \Phi^* \left(\sqrt{\frac{ik}{2(x - x_1)}} \right) \text{ pentru } \sqrt{ik} > \sqrt{2(x - x_1)}, \end{aligned} \quad (32)$$

unde $\Phi^*(q)$ este integrala erorilor, așa încât (31) devine

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi ik}} \int_0^x g(x_1) \Phi^* \left(\sqrt{\frac{ik}{2(x - x_1)}} \right) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - x_1 + \frac{z^2}{x - x_1} \right) \right] \frac{dx_1}{\sqrt{x - x_1}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Folosind reprezentarea asimptotică a funcției Φ^* [5]

$$\Phi^*(\sqrt{q}) = 1 - \frac{1}{\pi} e^{-q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{q^{n + \frac{1}{2}}} \text{ pentru } q \rightarrow \infty,$$

vom avea

$$\begin{aligned} \Phi^* \left(\sqrt{\frac{ik}{2(x - x_1)}} \right) = & 1 - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi(x - x_1)}{ik}} \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{1}{x - x_1} \right] + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{[2(x - x_1)]^{3/2}}{(ik)^{3/2}} \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{1}{x - x_1} \right] + \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Înlocuind (34) în (33) și ținând cont că $(\pi i)^{-1/2} = (1 - i)(2\pi)^{-1/2}$, găsim în cele din urmă pentru $\varphi^{(1)}$ expresia :

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} = & \frac{i - 1}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^x g(x_1) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - x_1 + \frac{z^2}{x - x_1} \right) \right] \frac{dx_1}{\sqrt{x - x_1}} + \\ & + \frac{1}{\pi i k} \int_0^x g(x_1) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - x_1 + \frac{1 + z^2}{x - x_1} \right) \right] dx_1 + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

Revenind acum cu (35) la expresia lui $\varphi(x, 0, z)$ din (29), găsim

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0, z) = & \frac{i-1}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^x g(x_1) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - x_1 + \frac{z^2}{x - x_1} \right) \right] \frac{dx_1}{\sqrt{x - x_1}} \\ & + \frac{1}{\pi i k} \int_0^x g(x_1) \exp \left[-i \frac{k}{2} \left(x - x_1 + \frac{1 + z^2}{x - x_1} \right) \right] dx_1 \\ & + \frac{(i+1)\sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x g(x_1) \exp \left[-i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} d\xi \times \\ & \times \int_{\xi+1-\sqrt{1+z^2}}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi^2 + z^2)}} \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1} \right] d\tau + \frac{(i+1)\sqrt{k}}{2\pi^{3/2}} \int_0^x g(x_1) \\ & \times \exp \left[-i \frac{k}{2} (x - x_1) \right] \frac{dx_1}{(x - x_1)^{3/2}} \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{\xi-1+\sqrt{1+z^2}}^{\infty} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi^2 + z^2)}} \\ & \times \exp \left[-i \frac{k}{2} \frac{\tau^2}{x - x_1} \right] d\tau + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

Observăm că primul termen din partea dreaptă a relației (36), este soluția din cazul plan dată de *M. T. Landahl* [4].

3. Să considerăm acum cazul $z = 0$ și de asemenea în continuare g independent de y , adică $G = G(s)$. În acest caz, relația (18) devine

$$\begin{aligned} \psi(y, 0, s) = & \frac{i}{2} G(s) \int_{-1}^{+1} H_0^{(2)}[\lambda(\xi - y)] d\xi \\ & + \frac{2}{\pi} G(s) \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{\xi-y}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi - y)^2}} + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Să notăm cu $\psi^{(1)}$ expresia

$$\psi^{(1)} = \frac{i}{2} G(s) \int_{-1}^{+1} H_0^{(2)}[\lambda(\xi - y)] d\xi. \quad (38)$$

Considerăm acum dezvoltarea asimptotică a funcției Hankel [5]

$$H_0^{(2)}(q) = \left(\frac{2}{\pi q} \right)^{1/2} e^{-i\left(q - \frac{\pi}{4}\right)} + \dots \text{ pentru } q \rightarrow \infty,$$

pe care o vom folosi în cazul nostru, deoarece λ prin ipoteză ia valori mari. Vom avea atunci

$$H_0^{(2)}[\lambda(\xi - y)] = \frac{i+1}{2\sqrt{\pi\lambda}} (\xi - y)^{-1/2} \exp[-i\lambda(\xi - y)] + \dots \quad (39)$$

Înlocuind (39) în relația (38) obținem

$$\psi^{(1)} = \frac{i(i+1)}{2\sqrt{\pi\lambda}} G \int_{-1}^1 (\xi - y)^{-1/2} \exp[-i\lambda(\xi - y)] d\xi + \dots \quad (40)$$

Ultima integrală în (40) se calculează ușor [5] și avem în cele din urmă

$$\psi^{(1)} = (i+1) \frac{G}{\lambda} \sqrt{2} 2^{1/2} \pi^{-1/2} (\lambda y)^{1/2} e^{i\lambda y} F_1^{(1)}\left(1, \frac{3}{2}, -i\lambda y\right) + \dots \quad (41)$$

unde $F_1^{(1)}$ este funcția lui Kummer [5], [6]. După [6] avem

$$e^{i\lambda y} F_1^{(1)}\left(1, \frac{3}{2}, -i\lambda y\right) = F_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, i\lambda y\right)$$

așa încît (41) ia forma

$$\psi^{(1)} = (i+1) \frac{G}{\lambda} \sqrt{2} 2^{1/2} \pi^{-1/2} (\lambda y)^{1/2} F_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, i\lambda y\right) + \dots \quad (42)$$

Este cunoscut însă [2], [6], că legătura între funcția Kummer și integralele Fresnel este dată de relația

$$C(q) \pm iS(q) = \pi^{-1/2} 2^{1/2} q^{1/2} F_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pm iq\right). \quad (43)$$

Cu (43) relația (42) devine

$$\psi^{(1)} = (i+1) \sqrt{2} \frac{G}{\lambda} [C(\lambda y) + iS(\lambda y)] + \dots \quad (44)$$

Înlocuind (44) în (37) obținem

$$\begin{aligned} \psi(y, 0, s) &= \sqrt{2} (i+1) \frac{G}{\lambda} [C(\lambda y) + iS(\lambda y)] \\ &+ \frac{2G}{\pi} \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{\xi-y}^{\infty} \frac{e^{-i\lambda\tau} d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi-y)^2}} + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Fie acum notată cu $\psi^{(2)}$, expresia

$$\psi^{(2)} = \frac{2G}{\pi} \int_{-1}^{+1} d\xi \int_{\xi-y}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (\xi-y)^2}}. \quad (46)$$

Ultima integrală în (46) are după [5] valoarea

$$\int_{\xi-y}^{\infty} [\tau^2 - (\xi-y)^2]^{-1/2} e^{-i\lambda\tau} d\tau = K_0[i\lambda(\xi-y)], \quad (47)$$

unde K_0 este funcția Hankel modificată [5]. Înlocuind (47) în (46) obținem

$$\psi^{(2)} = \frac{2G}{\pi} \int_{-1}^{+1} K_0 [i\lambda (\xi - y)] d\xi. \quad (48)$$

Folosind reprezentarea asimptotică a lui K_0 [5]

$$K_0(q) = \sqrt{\frac{\pi}{2q}} e^{-q} + \dots \text{ pentru } q \rightarrow \infty,$$

găsim

$$\int_{-1}^{+1} K_0 [i\lambda (\xi - y)] d\xi = -(i+1) \frac{\pi \sqrt{2}}{\lambda} [C(\lambda y) + iS(\lambda y)] + \dots, \quad (49)$$

așa încît $\psi^{(2)}$ ia forma

$$\psi^{(2)} = -(i+1) 2\sqrt{2} \frac{G}{\lambda} [C(\lambda y) + iS(\lambda y)] + \dots \quad (50)$$

Înlocuind (50) în (45) avem în sfîrșit

$$\psi(y, o, s) = -\sqrt{2} (i+1) \frac{G}{\lambda} [C(\lambda y) + iS(\lambda y)] + \dots \quad (51)$$

Așa deci, suma primilor termeni în forma asimptotică a lui $\psi(y, o, s)$ este tocmai soluția din cazul aripei rectangulare semiinfinită [10] multiplicată cu $-\sqrt{2}$. Un rezultat analog a fost obținut de *M. T. Landahl* [3], [4].

BIBLIOGRAFIE

1. Burger, A.P. and Timman, R.: Asymptotic solution at high frequencies of the boundary problem of diffraction by a strip. Proc. Of International Congress of Math. Vol. II, Amsterdam (1954).
2. Erdelyi, Magnus: Oberhettinger, Tricomi. Tables of Integral Transforms. McGraw Hill Book Company, NC (1954), Vol. I, II.
3. Landahl, M.T.: The oscillating rectangular wing with control surface. The Aeron. Research Institute of Sweden (FFA), Report 80, (1959).
4. Landahl M.T.: Unsteady Transonic Flow. Pergamon Press, Oxford/London/New-York/Paris, 1961).
5. Ryshik, M.I. and Gradstein, S.I.: Summen, -Produkt-und Integral-Tafeln. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1957).
6. Schäfer, W.F.: Einführung in die Theorie der Speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer-Verlag. Berlin/Göttingen/ Heidelberg (1963).
7. Schwarzschild, K.: Die Beugung und Polarisation des Lichts durch einen Spalt, I. Math. Annalen Bd. 55 (1902).
8. Sneddon, J.: Fourier Transforms. McGraw-Hill, New-York/Toronto/London (1951).
9. Timman, R.: Unsteady motion in transonic flow. IUTAM, Symposium Transsonicum, Aachen 1962, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg (1964).
10. Turbatu, S.: Aripa rectangulară semiinfinită în mișcarea transonică nestaționară.

ПРЯМОУГОЛЬНОЕ КРЫЛО В НЕСТАЦИОНАРНОМ ОКОЛОЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ**К Р А Т К О Е С О Д Е Р Ж А Н И Е**

Указан потенциал скорости возмущения для прямоугольного крыла с нормальными гармоническими колебаниями по отношению к площади крыла в околозвуковом движении.

RECTANGULAR WING IN TRANSONIC NON-STATIONARY, FLOW**S U M M A R Y**

The perturbation velocity potential is given for a rectangular wing executing harmonic oscillations normal to the wing plane in transonic flow.

THE EFFECT OF THE VITAMIN C ON THE HEALTH OF THE HUMAN BODY

BY
DR. J. H. H. H. H.

The effect of the vitamin C on the health of the human body is a subject of great importance. It is a well-known fact that the human body is unable to synthesize this vitamin and therefore it must be obtained from the food. The deficiency of this vitamin leads to a condition known as scurvy, which is characterized by a variety of symptoms, including weakness, fatigue, and a tendency to bleed.

THE EFFECT OF THE VITAMIN C ON THE HEALTH OF THE HUMAN BODY

BY
DR. J. H. H. H. H.

The effect of the vitamin C on the health of the human body is a subject of great importance. It is a well-known fact that the human body is unable to synthesize this vitamin and therefore it must be obtained from the food. The deficiency of this vitamin leads to a condition known as scurvy, which is characterized by a variety of symptoms, including weakness, fatigue, and a tendency to bleed.

CONFIRMĂRI EXPERIMENTALE ȘI GENERALIZĂRI ALE PRINCIPIULUI LUI SAINT-VENANT

N. IOSIPESCU

Principiul echivalenței elastice a sistemelor de forțe static echivalente ce acționează asupra unui corp, sub forma lui bine cunoscută, constituie o lege naturală de foarte mare importanță pe care, cu o minunată intuiție științifică, autorul ei, Barré de Saint-Venant, a enunțat-o principial încă din secolul XIX. Acest principiu a făcut ca un mare număr de soluții teoretice ale acestei discipline, stabilite pe cale matematică, să poată fi aplicate la rezolvarea unor probleme tehnice pe o scară foarte întinsă, deși anumite condiții la limită de pe contur ale acestora din urmă nu corespundeau decât în mod global cu acele ale soluțiilor teoretice respective.

O enunțare mai precisă, folosită în mod curent, a acestui principiu, pe care o reproducem aci după tratatul lui Bezuhov [1], este următoarea : „În punctele unui corp solid suficient de depărtate de zona de aplicare a sarcinilor exterioare, tensiunile depind în foarte mică măsură de modul detaliat de aplicare a acelor sarcini, ci numai de rezultanta și de momentul lor resultant”. În mod mai simplu, se poate spune de asemenea că : „perturbațiile produse prin modul diferit, dar static echivalent, sub care se aplică sarcinile exterioare asupra unui corp elastic, se amortizează repede, pînă la o distanță suficientă de locul considerat de aplicație a acelor sarcini”.

Prin acest principiu se stabilește deci că : „dacă forțele ce acționează asupra unei suprafețe mici se înlocuiesc printr-un sistem static echivalent aplicat pe aceeași suprafață, în urma aplicării noului sistem de forțe, se va produce o modificare a stării de tensiuni numai în imediata apropiere a sarcinei aplicate”; astfel că : „influența redistribuției tensiunilor va fi neglijabilă în punctele corpului elastic care, față de punctele de aplicație ale tensiunilor amintite, se află situate la distanțe de ajuns de mari, în comparație cu dimensiunile liniare ale suprafeței pe care ele sînt aplicate”.

Același autor arată că : „deși nu există o demonstrație teoretică a principiului lui Saint Venant, totuși valabilitatea lui poate fi dovedită dacă se pleacă de la principiul lucrului mecanic de deformare minim, conform căruia efectul local al forțelor static echivalente corespunde minimului energiei potențiale de deformare”. De fapt unele confirmări

experimentale concludente ale acestui principiu au putut fi obținute ușor prin intermediul cercetărilor fotoelastice, fiind reproduse de către diferiți autori, cum este și cazul lui Bezuhov [1] de ex., dintre care vom arăta câteva exemple aci.

Astfel este cazul discului de formă dreptunghiulară, comprimat de către tensiuni uniforme longitudinale (fig. 1), a cărei soluție teoretică

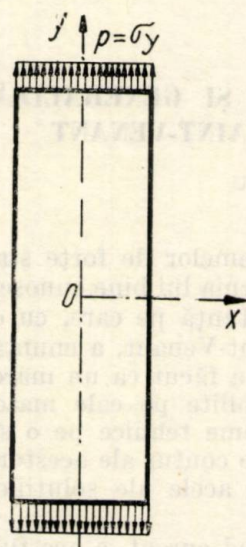


Fig. 1

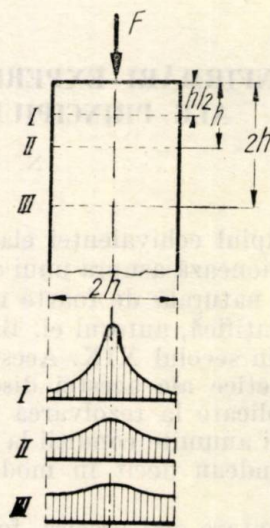


Fig. 2

globală din elasticitatea bidimensională este dată de către funcția elementară de tensiuni :

$f_1 = a_1 \frac{x^2}{2}$, care dă componentele tensiunii :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 0, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = a_1 \quad \text{și} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 0.$$

Această soluție este corect valabilă pe toată întinderea piesei numai în cazul cînd condițiile de contur corespund unei repartiții uniforme a presiunilor $p = \sigma_y = a_1$, aplicate pe secțiunile de capăt ale barei.

O soluție exactă a problemei, pentru cazul cînd eforturile de la capetele barei sînt produse de către forțe concentrate axiale, a fost obținută prin serii Fourier, fiind citată de către Timoshenko [2]. Repartițiile de tensiuni σ_y din secțiunile indicate sînt acele din fig. 2, reprodusă după acel autor, din care se constată amortizarea perturbațiilor.

Confirmarea fotoelastică a principiului lui Saint-Venant, pe baza acestei încercări, este dată în fig. 3, reprodusă după Frocht [3], din care se constată că aspectul izocromaticelor corespunde faptului că, prin mărirea lungimii piesei, regiunile de perturbații produse de către acțiunea

locală a forțelor de solicitare axiale concentrate rămân limitate la porțiunile din spre capete ale barei, de lungimi egale aproximativ cu lățimea piesei. Pentru toată porțiunea intermediară mijlocie, care rămîne între acele regiuni de perturbații locale (hașurate în fig. 4), tensiunile sînt uniform distribuite în sensul lățimii piesei, conform soluției teoretice indicate mai sus.

De asemenea în cazul solicitării unui disc de formă dreptunghiulară supus la încovoiere pură, a cărui soluție teoretică globală din elasticitatea

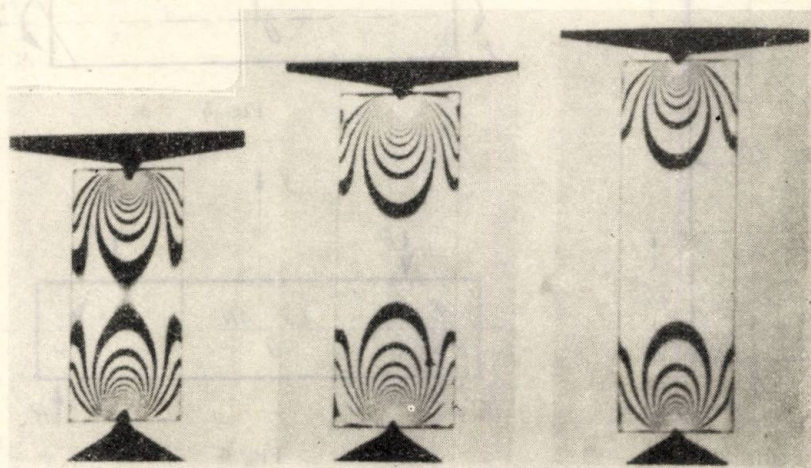


Fig. 3

bidimensională, exprimată prin funcții de tensiuni în coordonate rectangulare reprezentate prin polinoame, este dată de către funcția elementară de tensiuni :

$f_3 = a_3 \frac{y^3}{6}$, care dă componentele tensiunii :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = a_3 y, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} = 0.$$

Această soluție este valabilă numai în cazul cînd momentele de solicitare de la capete se aplică sub forma unei repartiții lineare de tensiuni σ_x , dată de formulele de mai sus, asupra secțiunilor de capete (fig. 5).

În cazul cînd acele momente sînt aplicate sub altă formă (fig. 6), porțiunile din spre capete, mergînd pînă la cîte o distanță oarecare de forțele exterioare, suferă perturbații care se amortizează pe distanțe suficiente. Astfel că partea mijlocie a lungimii piesei, rămasă între acele regiuni de perturbații hașurate pe figură, este supusă unei stări de încovoiere pură, după cum se constată din paralelismul izocromaticelor obținute fotoelastic, cum și din prezența unei linii singulare în axa neutră, rezultînd din fig. 7, reproducă de asemenea după Frocht [3], după cum s-a arătat de altfel și în [4].

O altă confirmare fotoelastică a principiului lui Saint-Venant este obținută ușor pentru exemplul citat de asemenea de către Bezuhov [1], al unei piese dreptunghiulare lungi supusă la o compresiune locală bilaterală (fig. 8), cum ar fi cazul unei bare strinse între fălcile unui clește,



Fig. 4

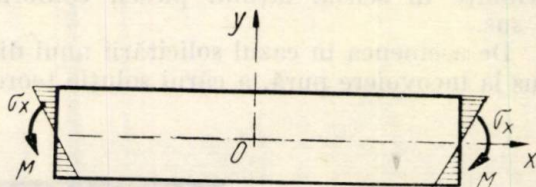


Fig. 5

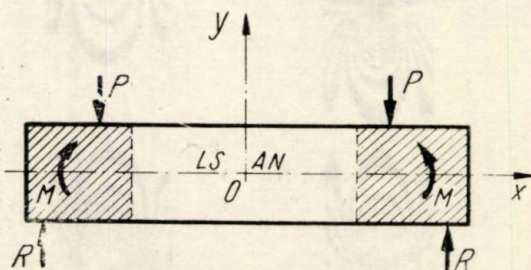


Fig. 6

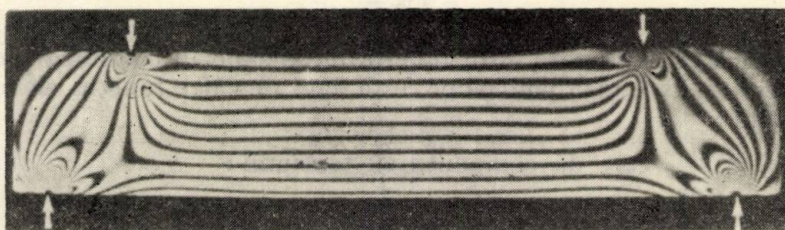


Fig. 7

pentru care tensiunile produse de către această solicitare sînt limitate într-o zonă de o formă apropiată de aceea hașurată din figură. Cercetările fotoelastice calitative și cantitative ale acestei stări de tensiuni arată că porțiunea intens solicitată a unui disc de formă dreptunghiulară acționat de o compresiune locală bilaterală, este cea situată în interiorul unei linii singulare neutre, de formă aproape circulară și că este foarte apropiată de aceea a unui disc circular comprimat diametral (vezi Mesmer [5] și Frocht [3]).

În realitate linia singulară neutră nu este o linie continuă și nici de formă perfect circulară, ci este formată dintr-o succesiune de șase puncte singulare distincte (S), legate între ele prin zone de stări de tensiune

minime, situate în apropiere de conturul circular de mai sus (fig. 9). Din fotografia izocromaticelor din fig. 10, se constată că zona din afară de acea regiune mai intens solicitată se află într-o stare apropiată de aceea neutră, lipsită de orice tensiuni de oarecare importanță, față de regiunea foarte intens solicitată din interiorul liniei singulare respective.

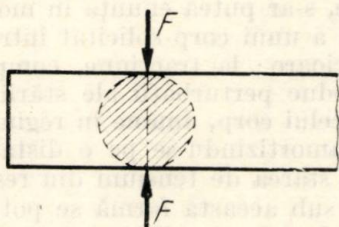


Fig. 8

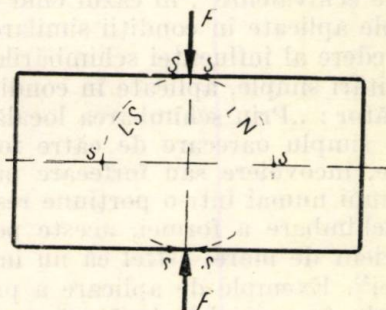


Fig. 9

Aceasta confirmă de asemenea principiul lui Saint-Venant aplicat la acest exemplu de solicitare, în sensul mai strict al enunțului următor : „dacă într-o parte oarecare a unui corp se aplică local un sistem în echi-

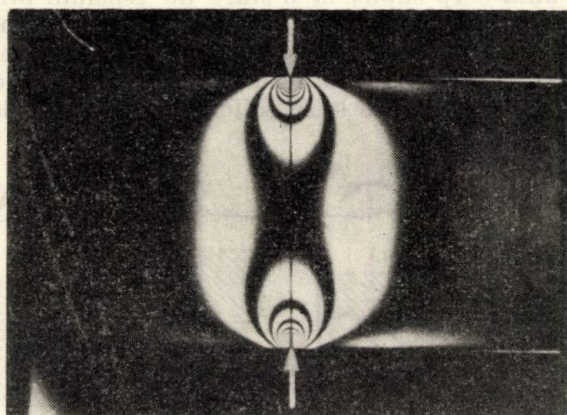


Fig. 10

libru de forțe, acesta produce în corp tensiuni care scad repede pe măsură ce ne depărtăm de acea parte a corpului”. De asemenea, enunțul principiului echivalenței elastice a sistemului de forțe static echivalente confirmat în acest mod, poate fi formulat astfel : „tensiunea produsă în corp prin aplicarea pe o porțiune mică a suprafeței sale a unui sistem de forțe static echivalente cu o forță nulă și cu un moment nul, este neglijabilă la distanțe mari în comparație cu dimensiunile lineare ale suprafeței asupra căreia acționează aceste forțe”.

Alte aspecte ale principiului lui Saint-Venant sînt destul de cunoscute din multe cercetări fotoelastice simple, ale unor probleme ale teoriei elasticității rezolvate experimental, fiind aplicate adeseori fără a se lua în considerare și a se menționa acest principiu, într-atît pare de naturală situația pe care am putea-o numi „de echivalență elastică a formelor static echivalente”, în cazul cînd acestea sînt acționate de către solicitări simple aplicate în condiții similare. Acest principiu, considerat din punct de vedere al influenței schimbărilor locale de formă ale pieselor supuse la solicitări simple, aplicate în condiții similare, s-ar putea enunța în modul următor: „Prin schimbarea locală de formă a unui corp solicitat într-un mod simplu oarecare de către forțele exterioare: la tracțiune, compresiune, încovoiere sau forfecare pură, se produc perturbații ale stării de tensiuni numai într-o porțiune restrînsă a aceluși corp, anume în regiunea de schimbare a formei, aceste perturbații amortizîndu-se pe o distanță suficient de mare, astfel că nu influențează starea de tensiuni din restul piesei”. Exemple de aplicare a principiului sub această formă se pot da destule, în special în legătură cu cercetările fotoelastice făcute cu privire la concentrările de tensiuni produse de către găuri sau creștături, ale barelor cu laturile paralele supuse la solicitări de întindere axială sau de încovoiere pură.

Sub acest aspect al lui, este ușor de văzut că principiul lui Saint Venant se poate generaliza, spunînd că: „orice modificare locală de formă produsă asupra unui corp supus la o stare de tensiuni bine determinată nu va produce o schimbare a stării de tensiuni decît în mod local, în acel corp, limitată la locul din apropierea acelei schimbări de formă, fără a avea nici o influență, la distanțe suficient de mari de acel loc, asupra stării de tensiuni existente inițial, pe baza solicitării produse de către forțele

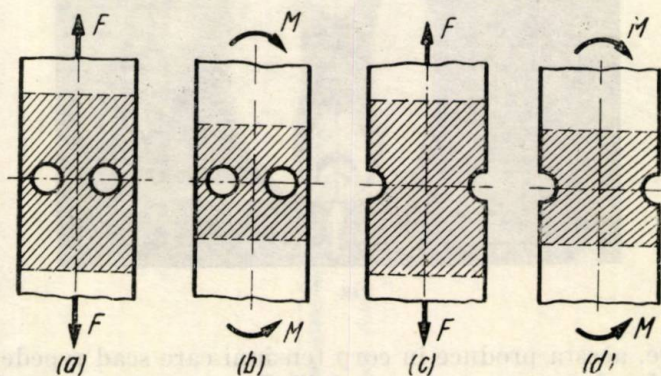


Fig. 11

exterioare”. Această considerație este însă valabilă numai în cazul cînd prin acele modificări de formă nu se produce o modificare a însuși modului de solicitare în ansamblu a corpului respectiv, ceea ce vom arăta că este posibil, cu altă ocazie, tot pe baza unor cercetări fotoelastice.

Exemple suficiente se pot obține din considerarea rezultatelor tuturor cercetărilor fotoelastice făcute pentru studiul concentrărilor de tensiuni din dreptul găurilor sau creștăturilor barelor cu laturi paralele (fig. 11 *a, b, c, d*), supuse la solicitări axiale de întindere sau compresiune, sau de încovoiere pură. Se constată din aspectul izocromaticelor tuturor acestor încercări, existente în tratatul lui Mesmer [5] și reproduse de asemenea

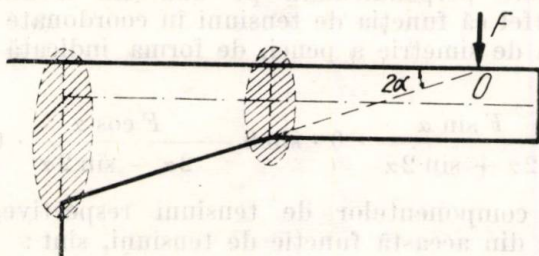


Fig. 12

în [4], că perturbațiile stărilor de tensiuni produse prin schimbările locale de formă, datorite prezenței găurilor și creștăturilor, față de întinderea axială sau încovoierea pură existente anterior, se limitează numai la cîte o porțiune din lungimea barelor respective, pe suprafețele hașurate în figurile de mai sus.

Un alt exemplu interesant este acel constatat cu ocazia studiului fotoelastic al vutelor grinzilor de beton armat, executat anterior de către

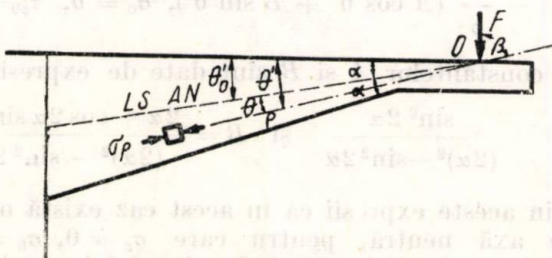


Fig. 13

autor la INCERC, a căror formă studiată a fost aceea din fig. 12. Pentru studiul fotoelastic și pentru calculul teoretic al acestor vute, pe baza teoriei elasticității, s-a considerat forma lor ca fiind alcătuită dintr-un trunchi de pană unghiulară, cu latura superioară orizontală și cu cea inferioară înclinată la $1/3$, prelungită cu o consolă de formă dreptunghiulară, deci cu laturile paralele. Considerînd latura inferioară a penei unghiulare prelungită pînă la intersecția ei cu latura superioară orizontală, în vîrf presupus al penei (O), se obține unghiul la vîrf 2α , a cărui tangentă este $\operatorname{tg} 2\alpha = 1/3$, avînd deci $2\alpha = 18^\circ 24'$. Considerînd acțiunea unei forțe verticale concentrate F , aplicate în dreptul aceluși vîrf, s-au putut

stabili expresiile componentelor de tensiuni în coordonate polare în porțiunea de formă unghiulară a vutei.

Cazul vutei acționată de către o forță verticală F , aplicată în vârful teoretic al penei, constituie un caz particular al penei de unghi la vîrf egal cu 2α și de o înclinare a direcției forței de acționare față de axul ei de simetrie (deci față de bisectoarea penei) egală cu β (fig. 13). În cazul cînd forța F este perpendiculară pe una din laturile penei, avem $\beta = 90^\circ - \alpha$, astfel că funcția de tensiuni în coordonate polare, considerată față de axa de simetrie a penei, de forma indicată de către Pirard [6], devine :

$$\Phi = - \frac{F \sin \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \theta \cdot \sin \theta - \frac{F \cos \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \cdot \theta \cdot \cos \theta$$

Expresiile componentelor de tensiuni respective, în coordonate polare, rezultate din această funcție de tensiuni, sînt :

$$\sigma_\rho = - \frac{2F \sin \alpha}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{\cos \theta}{\rho} - \frac{2F \cos \alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin \theta}{\rho}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = 0,$$

reprezentînd deci o stare de eforturi radiale.

Transformînd expresiile acestei tensiuni tot în coordonate polare, dar cu direcție origină de măsurare a unghiurilor θ' , îndreptată în direcție orizontală, după latura superioară a penei, prin schimbarea de variabilă $\theta = \theta' - \alpha$, se obține expresia tensiunilor sub forma simplă :

$$\sigma_\rho = - \frac{2F}{\rho} (A \cos \theta' + B \sin \theta'), \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = 0$$

în care valorile constantelor A și B sînt date de expresiile :

$$A = - \frac{\sin^2 2\alpha}{(2\alpha)^2 - \sin^2 2\alpha} \quad \text{și} \quad B = \frac{2\alpha + \cos 2\alpha \sin 2\alpha}{(2\alpha)^2 - \sin^2 2\alpha}$$

Rezultă din aceste expresii că în acest caz există o linie singulară, cu caracter de axă neutră, pentru care $\sigma_\rho = 0$, $\sigma_\theta = 0$ și $\tau_{\rho\theta} = 0$, sub forma unei drepte radiale, trecînd prin vîrfurile penei, de o înclinare față de orizontală dată de relația :

$$\operatorname{tg} \theta'_0 = - \frac{A}{B} = \frac{\sin^2 2\alpha}{2\alpha + \cos 2\alpha \sin 2\alpha}$$

Pentru cazul vutei de înclinare $\operatorname{tg} 2\alpha = 1/3$ a laturei inferioare, valorile calculate ale constantelor A și B devin :

$$A = -26,3 \quad \text{și} \quad B = 163,6$$

rezultînd valorile unghiurilor respective :

$$\alpha = 9^\circ 12' \quad \text{și} \quad \theta'_0 = 9^\circ 6',$$

astfel că linia singulară este situată aproximativ după bisectoarea unghiului de la vîrf al penei.

Studiul fotoelastic al acestei pene unghiulare, efectuat în cadrul studiului vutelor menționat mai sus, a confirmat prezența acelei linii

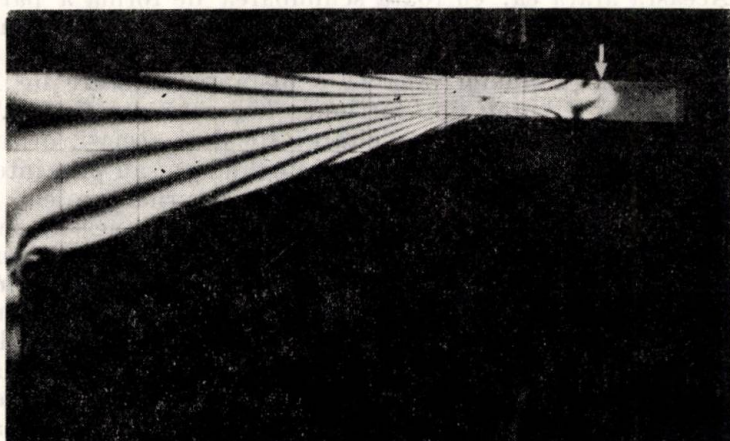


Fig. 14

singulare, stabilite teoretic, ca izocromatică de ordin 0, apropiată de bisectoarea unghiului la vîrf, după cum se constată din fotografia izocromaticelor din fig. 14.

În cazul vutei considerate, de forma mixtă din Fig. 12, cu o parte în formă de pană unghiulară și cu alta în formă de consolă dreptunghiulară

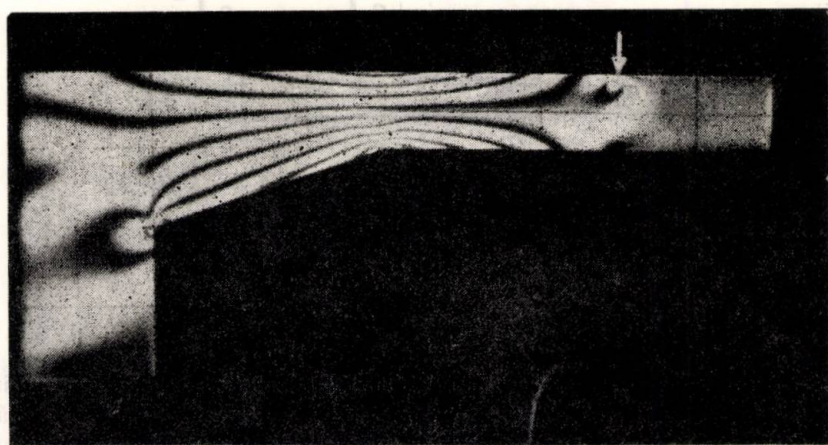


Fig. 15

cu tălpi paralele, solicitată de către o forță verticală aplicată în dreptul vîrfului teoretic al penei, se observă că fiecare din cele două părți, distincte

prezintă aspectul izocromaticelor caracteristice formei și solicitării lor (fig. 15). Partea în formă de pană unghiulară este caracterizată prin forma izocromaticelor similare cu acele din fig. 14, cum și prin prezența liniei singulare respective, apropiată de poziția bisectoarei unghiului de la vîrf al penei. Aceasta arată că, cu toată schimbarea de formă a părții de la vîrf a consolei în formă de pană, totuși efectul forței aplicate în dreptul vîrfului ipotetic al penei unghiulare este același ca și cînd pana ar fi completă, însă aceasta numai pînă la o distanță oarecare de locul de schimbare de formă a vutei, din porțiunea hașurată din fig. 12.]

Acțiunea acestei forme de solicitare este deci aceeași, oricare ar fi modul ei de aplicare, direct în vîrful penei unghiulare sau prin intermediul părții schimbate a formei penei, în consolă cu laturile paralele, în afară de o zonă de perturbații locale care se produc în regiunea de schimbare de formă, de la pana unghiulară la consolă dreptunghiulară, cum și în aceea a zonei de încastrare a penei. Rezultă de aci că enunțul principiului lui Saint Venant s-ar putea completa prin următoarea generalizare a lui : „Forțele de solicitare aplicate asupra unei piese, prin intermediul unei părți de formă modificată a acelei piese, față de forma ei inițială, acționînd totuși sub o formă static echivalentă cu primul caz, produc același efect de echivalență elastică asupra formei de bază a piesei, în afară de regiunea locului de schimbare de formă, unde se produc perturbații locale care se amortizează pe o mică distanță față de poziția acelui loc”.

O altă observație interesantă din același punct de vedere, care s-a putut face cu ocazia efectuării cercetărilor fotoelastice asupra vutei, a fost obținută cercetînd fotoelastic un alt caz al vutei, cu intradosul de formă parabolică cu concavitatea în jos (fig. 16), formă preconizată și

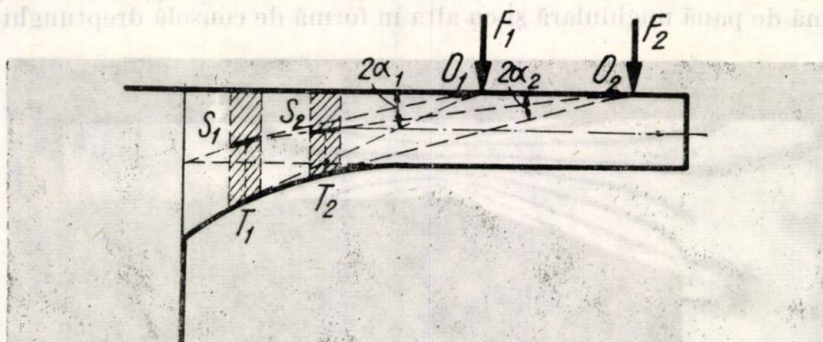


Fig. 16

studiată de către unii autori [7]. S-a constatat astfel că, în cazul diferitelor poziții ale forței verticale acționînd asupra consolei de acea formă, se produc diferite puncte singulare de forme alungite, în apropiere de curba mediană a formei consolei rezultate, poziția acelor puncte singulare putînd fi obținută din următoarea construcție geometrică : din punctul de aplicare al forței de solicitare, de pe latura superioară orizontală a consolei, se duce o dreaptă tangentă la curba intradosului parabolic al vutei. Se ridică

o verticală din punctul de tangență la curbă a acelei tangente, iar punctul de intersecție al acelei verticale cu bisectoarea unghiului pe care-l face tangenta la curba intradosului parabolic, cu direcția orizontală a extradodusului rectiliniu al vutei, determină poziția punctului singular, care este de o formă alungită în direcția acelei bisectoare. Construcția se

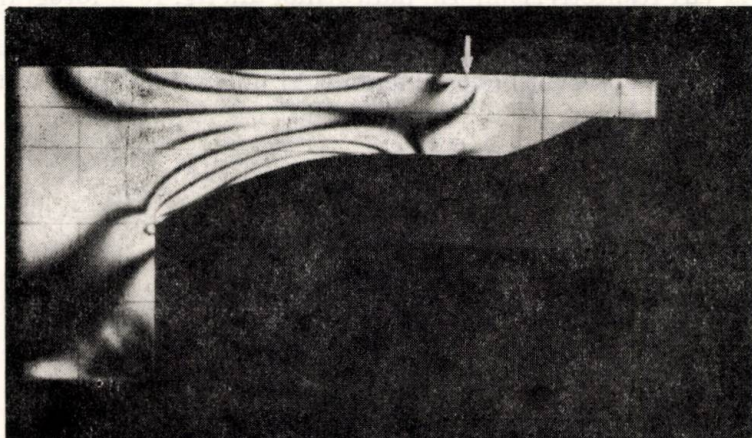


Fig. 17

confirmă pentru cele două cazuri de poziții diferite ale forței de solicitare din fig. 16, cu fotografiile izocromaticelor din fig. 17 și 18.

Această observație reprezintă o confirmare experimentală că punctele singulare respective pot fi considerate drept degenerări ale liniei

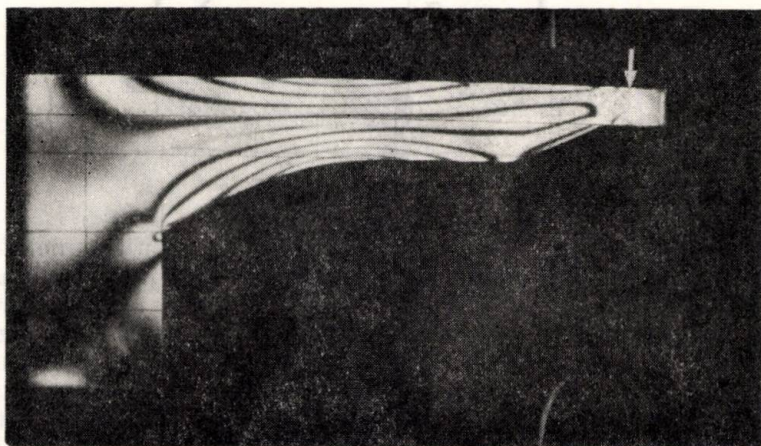


Fig. 18

singulare din cazul anterior, al penei unghiulare, producându-se în dreptul secțiunii în care tangenta la curba parabolică a intradosului trece prin

punctul de aplicare al forței asupra marginii superioare a consolei. Astfel că se poate deduce de aci, că o mică porțiune a consolei parabolice, din dreptul acelu punct de tangență al tangentei la intrados, dusă din punctul de acțiune al forței, poate fi considerată ca echivalentă, din punct de vedere elastic, cu porțiunea corespunzătoare din pana unghiulară de unghiul la vîrf respectiv, conform indicațiilor din fig. 16 și fotografiilor din fig. 17 și fig. 18

Rezultă de aci că, o altă generalizare a principiului lui Saint-Venant, bazată pe aceste observații experimentale, ar putea fi de forma următoare :

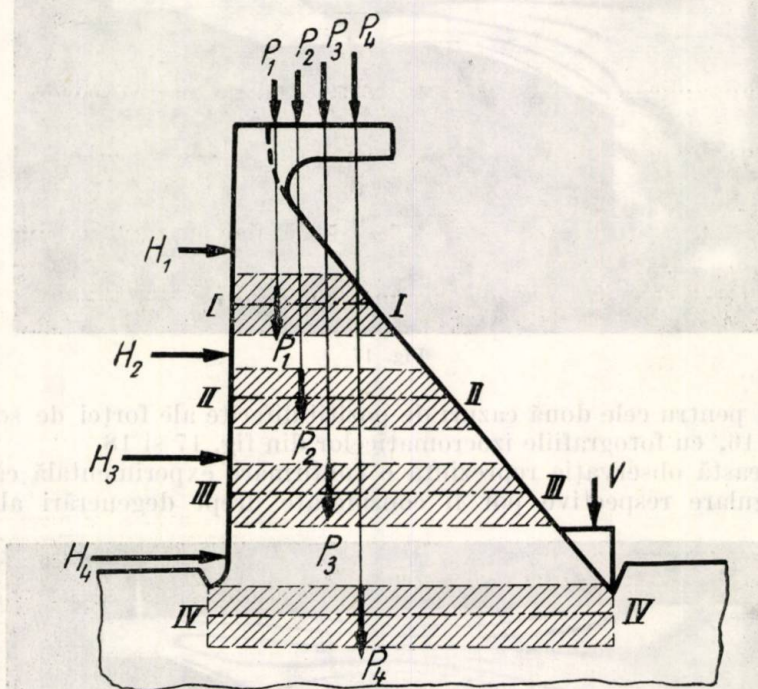


Fig. 19

„Atunci când condițiile unei stări de tensiuni, specifice unei forme de piesă și unui mod de solicitare oarecare, sînt îndeplinite numai local, într-o regiune suficient de întinsă a unei piese, din punct de vedere al formei și modului ei de solicitare, starea locală respectivă corespunde în mod echivalent din punct de vedere elastic, cu aceea a unei piese întregi de forma corespunzătoare și de același mod de solicitare”.

Un alt exemplu de modul de aplicare a principiului lui Saint Venant sub forma enunțată mai sus, tot pentru cazul unui disc în formă de pană unghiulară, se poate considera că a fost folosit în următorul studiu fotoelastic, efectuat anterior de către Milbauer [8], fără a se fi accentuat acolo acest caracter de generalizare a principiului. S-a pus problema de a se studia fotoelastic profilul unui baraj de greutate de formă triun-

ghiulară din fig. 19, ținându-se seama de greutatea proprie a aceluia baraj, care trebuia să contribuie la asigurarea echilibrului necesar stabilității cu ocazia efectuării încercărilor fotoelastice. Greutatea proprie fiind o forță masică, ea nu se poate realiza experimental ca atare în cercetările fotoelastice, decît în mod foarte dificil, prin centrifugare și înghețare sau prin subpresiunea obținută prin scufundarea modelului în poziție inversată în mercur.

Pentru a se evita aceasta și pentru a se realiza acțiunea greutății proprii a barajului în mod obișnuit, sub forma unei forțe exterioare, autorul ceh Milbauer [8] a aplicat următoarea soluție. Modelul de baraj s-a alcătuit conform Fig. 19, prevăzîndu-se cu o prelungire orizontală din dreptul vîrfului, îndreptată către partea din aval a barajului, asupra căreia s-au aplicat pe rînd diferite forțe concentrate verticale: P_1 , P_2 , P_3 și P_4 , în poziții și de valori rezultînd din considerarea greutății barajului pînă la nivelul unor secțiuni orizontale date: I, II, III și IV, de poziții diferite, în dreptul cărora urma a se măsura și a se face verificarea stării de tensiuni. În modul acesta s-au considerat fenomenele fotoelastice respective, din diferitele zone sub formă de fișii orizontale, din dreptul diferitelor secțiuni: I, II, III și IV. În lungul acestora s-au făcut integrările respective și s-au trasat diagramele de variație ale componentelor de tensiuni, rezultînd din forțele orizontale: H_1 , H_2 , H_3 , H_4 , cum și din acele verticale: P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , considerate ca valabile pentru fiecare din acele fișii hașurate din fig. 19.

Conform aplicării principiului lui Saint Venant generalizat, enunțat sub forma de mai sus, rezultă că în dreptul secțiunilor considerate, în mod local, se produce starea de tensiuni corespunzătoare acțiunii greutății masivului de beton de deasupra nivelului respectiv al acelei secțiuni, aplicată sub forma de forță exterioară, prin intermediul prelungirii forme de la partea superioară a modelului barajului triunghiular, acționînd simultan cu forțele orizontale corespunzătoare, date de către presiunea apei asupra paramentului din amonte al barajului pînă la nivelul respectiv.

Rezultă deci din cele expuse în acest articol că prin intermediul fotoelasticității au fost posibile de realizat confirmările experimentale ale principiului lui Saint-Venant, dar că au putut fi stabilite și unele considerații asupra generalizării acestui principiu sub formele arătate mai sus.

BIBLIOGRAFIE

1. N.I. Bezuhov: Teoria Elasticității și plasticității (traducere din l. rusă). Editura Tehnică, București 1957.
2. S. Timoshenko: Theory of Elasticity, Ed. Mc. Graw Hill, New York, 1934.
3. M.M. Frocht: Photoelasticity, vol. II, John Wiley and Sons 'New York' 1949.
4. N. Iosipescu: Introducere în Fotoelasticitate, vol. II, Ed. Tehnică, București, 1960.
5. G. Mesmer: Spannungsoptik — Ed. Springer, Berlin 1939.
6. A. Pirard: La Photoélasticité — Ed. Dunod — Paris și Liège, 1947.
7. C. Avram: Grinzi continue cu moment de inerție variabil — Tipografia Geniului, București, 1946.
8. M. Milbauer: Fotoelasticimetrie — Staní nakladatelství technické literatury — Praga, 1953.

ОПЫТНЫЕ ПОДТВЕРЖДЕНИЯ И ОБОЩЕНИЕ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Цитируя из литературы некоторые изложения принципа Сен-Венана, автор приводит ряд убедительных примеров опытных подтверждений данного принципа, осуществленных методом фотоупругости, применяемым в некоторых вопросах двух-размерной упругости.

Рассматривая так же некоторые вопросы, разрешенные на основании фотоупругих исследований в связи с применением указанного принципа для случаев возможных изменений формы нагруженных строительных элементов, автор устанавливает ряд более широких определений данного принципа. Указываются так же некоторые примеры и применения.

CONFIRMATIONS EXPÉRIMENTALES ET GÉNÉRALISATIONS DU PRINCIPE DE SAINT-VENANT

RÉSUMÉ

En citant quelques énoncés classiques du principe de Saint-Venant, l'auteur donne des exemples conclusifs de confirmations expérimentales, réalisées par voie photoélastique, de ce principe, appliqué à certains problèmes de l'élasticité bidimensionnelle.

En étudiant aussi quelques problèmes pour l'application de ce principe, en cas de certaines modifications de la forme des pièces, réalisées aussi par voie de recherches photoélastiques, l'auteur établit des formes plus générales de ce principe. On présente aussi des exemples et des applications pour cette forme généralisée du principe de Saint-Venant.

UNELE APLICAȚII ALE TOPOLOGIEI ÎN BIOLOGIE

TIBERIU POSTELNICU

1. În prima parte a cercetărilor, biomatematica, adică aplicarea diferitelor domenii din matematici în biologie, a scos în evidență aproape exclusiv aspectele metrice ale fenomenelor biologice, adică cele legate de măsurători. Ulterior, s-a pus problema studierii relațiilor ce există între diverse fenomene și pentru aceasta s-a apelat la topologie. Se știe că o aplicație analoagă a fost formulată de Kurt Lewin [1] pentru psihologie. De asemenea, cercetările vechi ale lui D'Arcy W. Thompson conțin unele relații topologice [2]. Observația fundamentală a lui Thompson a fost aceea că, craniile sau alte părți ale scheletului diferitelor animale pot fi transformate în oricare altul printr-o sumă de transformări simple, continue și univale.

Acestea au fost totuși, anumite relații relativ superficiale. Analogiile topologice au mers însă, mult mai profund datorită nu numai observațiilor relațiilor structurale, ci și acelor funcționale (în sens biologic).

Cercetările experimentale au arătat că orice organism poate fi aplicat pe oricare altul, astfel încât anumite relații de bază să fie conservate. Anumite proprietăți ale unui organism mai mare sînt în general, aplicate pe un număr mai mic, sau chiar numai pe o proprietate a unui organism mai mic.

Pentru descrierea matematică a acestor considerații s-a apelat în deosebi, la teoria mulțimilor, topologie și teoria grupurilor care se ocupă cu studiul aplicațiilor și relațiilor. O expunere în acest sens găsim în cartea lui N. Raşevsky [3].

2. Orice organism este dotat cu o serie de proprietăți care îl caracterizează. Astfel, organismele sînt dotate de exemplu, cu proprietățile: de a fi sensibile la anumiți factori stimuli, notată cu S ; de apariție a anumitor mișcări datorită stimulenților, notată cu M ; de a asimila hrana, notată cu A ; proprietatea D de a digera; proprietatea C de conducere a unui impuls etc.

Astfel se poate spune că un organism este, cel puțin în parte, caracterizat printr-o serie de proprietăți biologice ca cele de mai sus. Aceste proprietăți, care nu sînt independente, alcătuiesc „mulțimea proprietăților biologice”.

Fie P diferite proprietăți specifice notate cu indici astfel : P_S — sensibilitatea la stimuli externi, P_C — conductibilitatea excitației, P_M — mișcările, P_A — absorbția etc. Într-un organism unicelular, celula posedă toate proprietățile de bază P_i ($i = S, C, M, A, \dots$).

Proprietatea organismelor pluricelulare este specializarea celulelor, deci nu toate celulele posedă toate proprietățile de bază. Însă, legătura dintre două proprietăți diferite P_i, P_j indiferent dacă ele aparțin aceleiași celule sau unor celule diferite, rămâne aceeași ca într-un organism unicelular.

Să definim un *lanț* ca fiind mulțimea proprietăților $\{P_i\}$ care se condiționează una pe cealaltă.

Numim *mulțime deschisă*, o mulțime de proprietăți care odată cu o proprietate conține un lanț din care face parte proprietatea respectivă.

Putem astfel defini un organism ca fiind o mulțime de proprietăți astfel încât oricare ar fi proprietățile P_i și P_j din această mulțime, există un lanț care le leagă.

Astfel, o vecinătate a unei proprietăți poate fi definită ca orice mulțime deschisă care conține proprietatea respectivă. În acest mod, reprezentînd proprietățile care caracterizează un organism printr-o mulțime de puncte, iar vecinătățile definite ca mai sus, putem organiza mulțimea proprietăților biologice într-un spațiu Σ , constatîndu-se ușor, că axiomele spațiului topologic sînt verificate. Avem astfel :

Teorema : Mulțimea proprietăților biologice asociată unui organism pluricelular formează un spațiu topologic.

În legătură cu acest spațiu putem demonstra :

Teorema : Spațiul topologic Σ asociat unui organism pluricelular este conex.

Într-adevăr, dacă spațiul n-ar fi conex, ar exista prin definiție, două subspații A, B cu condițiile :

$$\Sigma = A \cup B, \quad \bar{A} \cap B = 0, \quad A \cap \bar{B} = 0$$

unde $\bar{A}$ este formată din A și toate proprietățile din lanțurile generate de punctele lui A . Aceasta implică ca nici un punct din A să aparțină unei vecinătăți din B , ci invers. Dar dacă vecinătățile sînt definite ca mai sus, atunci ipoteza făcută ne spune că nici o proprietate din submulțimea A nu este legată de o proprietate a submulțimii B , — și invers. Dar, în acest caz am avea două organisme separate și necorelate, ceea ce contrazice ipoteza că spațiul este atașat unui singur organism.

3. Rezultă din teoremele de mai sus că modul cel mai natural de a exprima matematic problema pusă este de a reprezenta proprietățile unui organism și relațiile dintre ele, printr-un spațiu conex și studiarea aplicațiilor continue ale acestor spații, unele pe altele.

Aceasta deoarece restricția ca într-o aplicație relațiile biologice fundamentale să se păstreze, se traduce prin continuitatea aplicației unul pe altul a celor două spații abstracte care reprezintă două organisme oarecari.

N. Rașevsky a dat așa numitul „principiu al aplicației biotopologice”, care se poate formula astfel : Spațiile topologice prin care sînt reprezentate diferite organisme se obțin toate, dintr-un spațiu inițial Σ_0

(sau cel mult din câteva astfel de spații) prin aceeași transformare care conțin un număr de parametri, ale căror diferite valori corespund diferitelor organisme.

O caracteristică a organismului multicelular este că apar un număr de proprietăți noi. Astfel de exemplu, proprietatea de sensibilitate la stimuli externi poate deveni sensibilitate la stimuli chimici, fizici etc. și deci, fiecare P_s este o mulțime de subproprietăți $P_{s\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots$) și în general, avem :

$$P_{i\alpha} \subset P_i$$

Cînd se examinează aplicația diferitelor organisme pe altele, se observă că mulțimea $E_1(P_{i\alpha})$ a proprietăților P_i dintr-un organism se aplică pe mulțimea $E_2(P_{i\beta})$ a altui organism, iar ambele se aplică pe mulțimea P_i a organismului primar. Familia de submulțimi $P_{i\alpha}$ poate fi infinită, iar două submulțimi $P_{i\alpha}, P_{i\beta}$ nu sînt neapărat disjuncte.

Se zice că P_i este o consecință imediată a lui P_i adică,

$$P_i \rightarrow P_i$$

dacă manifestarea lui P_i cauzează manifestarea lui P_j , fără să fie necesară manifestarea unei alte proprietăți P_k . Așa de exemplu,

$$P_s \rightarrow P_c, \quad P_c \rightarrow P_m$$

În legătură cu cele de mai sus se pun următoarele probleme :

1) Să se determine numărul total N al diferitelor mulțimi care corespund unei mulțimi de proprietăți $\{P_i\}$ date. Acest număr ne-ar da numărul total al organismelor posibile.

2). De studiat omeomorfismele între diferite spații topologice definite ca mai sus și de găsit invarianții, adică proprietățile biologice fundamentale. În particular. de studiat aplicațiile organismelor superioare (multicelulare) pe organisme primare (unicelulare).

În acest sens, există unele încercări și rezultate ale lui J.H. Woodger [4] de a crea o biologie axiomatică și ale lui Robert Rosen [5] — de a aplica teoria categoriilor și echivalenței a lui S. Eilenberg — S. Mac Lane precum și teoria grafurilor.

BIBLIOGRAFIE

1. Kurt Lewin: Principles of Topological Psychology, New York, 1936.
2. D'Arcy W. Thompson: On Growth and Form, Univ. Pres., 1917.
3. N. Rașevsky: Mathematical biophysics, New York, 1960, cap. XXVIII, pag. 306.
4. J.H. Woodger: Axiomatic Method in Biology, Cambridge, Univ. Pres, 1937.
5. R. Rosen: Bull. Math. Biophysics, 20, 245, 1958, 20, 317, 1958.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТОПОЛОГИИ В БИОЛОГИИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В данной заметке автор даёт, исходя из работы Н. Рашевского, некоторые задачи, которые ставятся в связи с применением топологии в биологии. Дается, также, другое определение ассоциированной окрестности для некоторого определённого биологического свойства. Доказывается, что множество биологических свойств формирует топологическое связное пространство.

QUELQUES APPLICATIONS BIOLOGIQUES DE LA TOPOLOGIE

Résumé

Dans cette note l'auteur présente quelques problèmes liés avec les applications de la topologie en biologie, en partant du travail de N. Rashevsky.

On donne une autre définition d'un voisinage associé avec une propriété biologique et on démontre que l'ensemble des propriétés biologiques forme un espace topologique connexe.

ASUPRA UNOR SPAȚII CU BAZĂ

GH. SIREȚCHI

În această notă se extind unele proprietăți ale spațiilor *Banach* cu bază (bază *Schauder*) la spații vectoriale topologice cu bază, metrizabile cu metrică invariantă.

Fie X un grup aditiv și ρ o metrică invariantă pe X . Dacă punem $|x| = \rho(x, 0)$ atunci i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ii) $|x| = |-x|$ ($\forall x \in X$), iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ($\forall x, y \in X$). Reciproc, orice funcțională $x \rightarrow |x|$ pe X cu proprietățile i)–iii) definește o metrică invariantă pe X , punind $\rho(x, y) = |x - y|$ ($\forall x, y \in X$).

Se numește *spațiu de tip M* un spațiu vectorial X peste corpul Φ , pe care s-a definit o metrică invariantă ρ astfel că aplicația $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ este continuă separat în raport cu λ și x .

Se poate arăta [1] că orice spațiu de tip M este un spațiu vectorial topologic.

Fie X un spațiu vectorial topologic, un sistem numerabil $\{e_n\}$ de elemente din X se numește *bază Schauder* a lui X dacă $(\forall x \in X)$ există un sistem de scalari $\{\lambda_n(x)\}$ unic determinat, astfel încît

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) e_n$$

Se vede imediat că $(\forall n = 1, 2, \dots)$ corespondența

$$x \longrightarrow \lambda_n(x), \quad x \in X$$

definește o funcțională liniară pe X . Funcționalele astfel definite vor fi numite *funcționalele coordonate* ale lui X în baza $\{e_n\}$. Deducem imediat

că operatorii $x \rightarrow s_n(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e_i$ și $x \rightarrow r_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i(x) e_i$ sînt liniari pe X .

Lema. Fie X, X' două grupuri topologice aditive, X' de categoria a II-a lui Baire, astfel încît pentru orice $V = V(0)$ avem $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$ și f un omomorfism a lui X pe X' . Atunci pentru orice $U = U(0)$ există $U' = U'(0)$ astfel încît $U' \subseteq f(U)$.

Teoremă. 1. Fie X un spațiu de tip M , de categ a II-a lui Baire, cu bază Schauder dată de sistemul $\{e_n\}$. Atunci

a) funcționalele coordonate $x \rightarrow \lambda_n(x)$ $n = 1, 2, \dots$ constituie o bază Schauder a lui X înzestrat cu topologia slabă.

b) operatorii $\{s_n\}_{1 \leq n < +\infty}$ ca și $\{r_n\}_{1 \leq n < +\infty}$ sînt liniari și egal continui pe X .

Demonstrație. Evident funcționala $x \rightarrow |x|_1 = \sup |s_n(x)|$ definește o metrică invariantă ρ_1 pe X și $|x| \leq |x|_1$ ($\forall$) $x \in X$. Să arătăm că ρ_1 este topologic echivalentă cu metrica inițială. Pentru aceasta să observăm că aplicația identică $h : (X, |\cdot|_1) \rightarrow (X, |\cdot|)$ îndeplinește condițiile lemei.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ și $x^0 \in X$. Cum X este de tip M este vectorial topologic deci există $\alpha_0 > 0$ cu $|\alpha x^0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ($\forall$) $|\alpha| \leq \alpha_0$. Însă deoarece

$|s_n(x^0) - x^0| \rightarrow 0$, există $\alpha'_0 > 0$ și n_ε astfel că $|\alpha(s_n(x^0) - x^0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

($\forall$) $|\alpha| \leq \alpha'_0$ și $n \geq n_\varepsilon$. De aici se deduce

$|\alpha s_n(x^0)| \leq |\alpha(s_n(x^0) - x^0)| + |\alpha x^0| \leq \varepsilon$ ($\forall$) $|\alpha| \leq \min(\alpha_0, \alpha'_0)$ și $n \geq n_\varepsilon$.

De asemenea pentru $s_i(x^0)$, $i = 1, 2, \dots, n_\varepsilon$ există $\alpha''_0 > 0$ astfel că $|\alpha s_i(x^0)| \leq \varepsilon$ ($\forall$) $|\alpha| \leq \alpha''_0$ și $i = 1, 2, \dots, n_\varepsilon$.

Deci $\sup_{1 \leq i < +\infty} |\alpha s_i(x^0)| \leq \varepsilon$ ($\forall$) $|\alpha| \leq \alpha' = \min(\alpha_0, \alpha'_0, \alpha''_0)$ adică

$|\alpha x^0| \leq \varepsilon$ ($\forall$) $|\alpha| \leq \alpha'$, și deci există m natural cu proprietatea $\left| \frac{1}{m} x^0 \right|_1 \leq$

$\leq \varepsilon$ și prin urmare $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n \{x \mid |x|_1 \leq \varepsilon\}$

Aplicînd lema găsim un $\delta > 0$ astfel că: $\{x, |x| < \delta\} \subseteq h(\{x, |x|_1 \leq \varepsilon\}) \subseteq \subseteq \{x, |x|_1 \leq \varepsilon\}$ adică $\tau_1 \leq \tau$ și cum $\tau \leq \tau_1$ avem $\tau = \tau_1$

Mai departe, pentru $n = 1, 2, \dots$ avem

$$|\lambda_n(x) e_n| = |s_n(x) - s_{n-1}(x)| \leq 2 \sup_n |s_n(x)| = 2 |x|_1$$

deci operatorul $x \rightarrow \lambda_n(x) e_n$, $x \in X$ este continuu pe X în topologia τ și cum funcționala $\lambda_n(x) e_n \rightarrow \lambda_n(x)$, $x \in X$ este bicontinuă de la sp. (e_n) la Φ conchidem că funcționala $x \rightarrow \lambda_n(x)$, $x \in X$ este continuă pe X .

Prin urmare orice element $x \in X$ admite reprezentarea unică

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) e_n$$

unde $\lambda_n \in X^*$.

Fie acum $x^* \in X^*$, arbitrar, atunci

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) x^*(e_n) \quad (\forall) \ x \in X$$

deci $\{\lambda_n\}$ constituie o bază Schauder a lui X^* înzestrat cu topologia slabă.

Evident operatorii $x \rightarrow s_n(x)$, $x \in X$ sînt continui și cum $\lim_n s_n(x)$ există pentru orice $x \in X$ cu teorema Banach-Steinhaus [2] deducem că s_n sînt egal continui.

Teoremă. 2 Fie X un spațiu de tip M , complet cu bază Schauder dată de sistemul $\{e_n\}$ și $K \subseteq X$. Atunci K este relativ compactă dacă și numai dacă $\lambda_n(K)$ este mărginită $(\forall) n = 1, 2, \dots$ și seria $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x) e_n$ este uniform convergentă pe K .

Demonstrație. Deoarece $\lambda_n \in X^*$ (T.1) și K este relativ compactă avem că $\lambda_n(K)$ este mărginită. Din T.1 mai avem că $s_n \in X^*$ deci cu teorema Banach-Steinhaus [2], deducem că $\lim_n s_n(x) = x$ uniform față de $x \in K$.

Pentru a demonstra implicația reciprocă să remarcăm că funcționalele $x \rightarrow s_n(x)$ aplică X pe spațiul $\text{sp} \{e_1, \dots, e_n\}$, care fiind finit dimensional topologia indusă pe el este normabilă cu norma euclidiană. Cum prin ipoteză $\lambda_i(K)$ este o mulțime mărginită pentru orice $i = 1, 2, \dots$, deducem că $s_n(K)$ este mărginită în $\text{sp} \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și deci total mărginită.

Fie $V = V(0)$ o vecinătate arbitrară în X , există atunci $U = U(0)$ echilibrată cu $U + U \subseteq V$. Deoarece $\lim_n s_n(x) = x$ uniform față de $x \in K$, există N astfel că

$$s_n(x) \in x + U, \quad (\forall) n \geq N \quad \text{și } x \in K$$

Cum însă $s_N(K)$ este total mărginită există $x_1, \dots, x_p$ astfel că $s_N(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^p (x_i + U)$. De aici avem că pentru orice $x \in K$ există i , $1 \leq i \leq p$ cu $x - x_i \in U + U \subseteq V$, adică $K \subseteq \bigcup_{i=1}^p (x_i + V)$ și prin urmare K este total mărginită deci, spațiul X fiind complet, K este relativ compactă.

Consecință. Fie X_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ spații de tip M peste același corp de scalari și complete, $X = \prod_n X_n$ înzestrat cu structura vectorială și structura topologică produs. Atunci o mulțime K din X este relativ compactă dacă și numai dacă $pr_n(K)$ este mărginită $(\forall) n = 1, 2, \dots$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Day, N. M.: Normed linear spaces, SPRINGER-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
- [2] Dunford, N.T. and Schwartz: J.T., Linear operators I, New York, London, 1958.

О НЕКОТОРОМ ПРОСТРАНСТВЕ С БАЗИСОМ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе распространяются некоторые свойства банахова пространства с базисом Шаудера на топологические векторные пространства метризуемые инвариантной метрикой и полные. В частности демонстрируется что функций — координаты и $x \rightarrow \lambda_n(x)$, $x \in X$ являются непрерывными, и также критерии относительной компактности.

SUR QUELQUES ESPACES A BASE

RÉSUMÉ

Dans cette note on étend quelques propriétés des espaces de *Banach* aux espaces vectoriels topologiques, complètes qui possèdent une base de *Schauder* et sont métrisables avec une métrique invariante. En particulier on démontre que les fonctions coordonnées $x \rightarrow \lambda_n(x)$ sont linéaires et continues (T. 1), et aussi on démontre un criterium de relative compacité dans ces espaces (T. 2).

STUDIUL FOTOELASTIC AL STĂRII DE TENSIUNE DIN JURUL UNOR LUCRĂRI SUBTERANE

T. HUIDU

Cu studiul experimental al stării plane de tensiuni din jurul unor goluri realizate în cuprinsul unui disc de diferite forme și solicitări, executat prin metoda fotoelasticității, s-au ocupat mai multe laboratoare și numeroși experimenatori din străinătate, lucrările respective fiind publicate în diferite reviste și tratate de specialitate [1, 2, 3, 4, 5]. Un studiu preliminar realizat prin această metodă, pe un profil al golului de formă trapezoidală (galerie de formă trapezoidală nesusținută și susținută) a fost făcut și de noi în anii trecuți pentru I.C.E.M.I.N. [6].

În prezent ne vom ocupa de studiul repartiției tensiunilor în cazul a două galerii apropiate, dispuse după verticală sau după orizontală (fig. 2, 3, 4). În afară de distanța dintre marginile exterioare ale discului reprezentind o secțiune prin teren și galerii, pentru care nu s-a respectat o anumită scară a similitudinii geometrice, în rest — dimensiunile galeriilor cât și distanța dintre ele — s-au făcut cercetările fotoelastice la scara 1 : 2000.

În figurile 5, 6, 7, 8 și 8a, sînt date fotografiile izocromatelor obținute experimental în cazul unei repartiții uniforme de tensiuni pe marginile superioară și inferioară a unui model în grosime de 0,5 cm. Modelul a fost confecționat dintr-un material transparent și optic activ (rășină epoxidică) preparat în laboratorul Facultății de Matematică-Mecanică a Universității București cu concursul tov. Mindru Ilie, asistent la Facultatea de Chimie.

Ipotezele în care s-a lucrat sînt cele ale teoriei elasticității plane. Adică s-a pus problema determinării stării plane de tensiuni din interiorul unui disc care se deformează fără a depăși limitele elasticității, sub sarcina p uniform distribuită pe marginile superioare și inferioare (vezi figurile).

Materialul este izotrop din punct de vedere mecanic și optic, în starea sa inițială netensionată.

În fig. 1, pe baza tabloului izocromatelor obținute experimental și a căror fotografie o reproducem în fig. 6, a fost trasată curba tensiunilor care acționează pe conturul de formă circulară. Problema este cunoscută, ea fiind rezolvată teoretic și citată în tratatele de teoria elasticității. După cum se știe și după cum rezultă și din verificările făcute de noi,

în cazul unui profil circular apar tensiuni de tracțiune în tavan și în vatră (partea de sus și de jos a golului), cum și tensiuni de compresiune în pereți

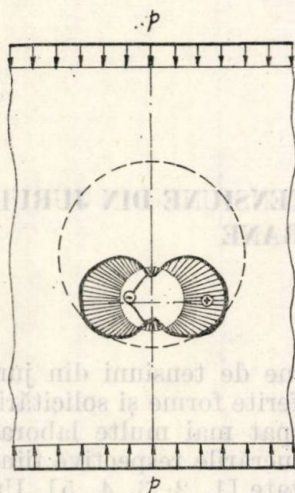


Fig. 1

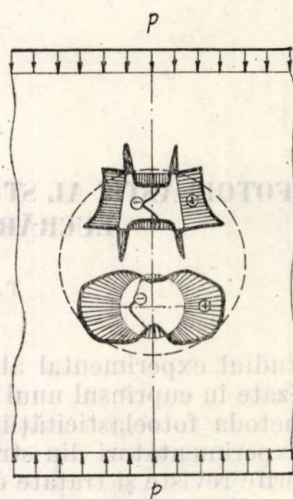


Fig. 2

(părțile laterale ale golului). Atît în acest caz cît și în cele următoare, am notat cu semnul (-) suprafețele diagramelor tensiunilor de contur de

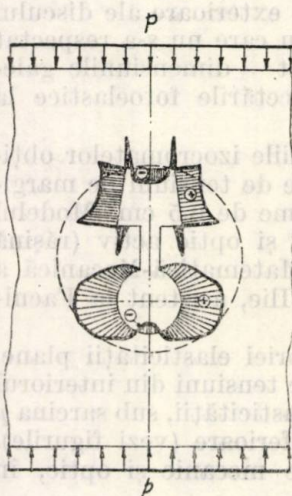


Fig. 3

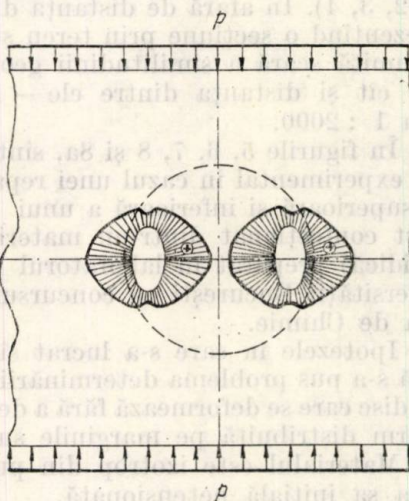


Fig. 4

întindere (curbele trasate în interiorul golurilor) și cu semnul (+) am notat suprafețele diagramelor tensiunilor de contur de compresiune (curbele trasate în exteriorul golurilor).

În fig. 2 corespunzător cu tabloul izocromatelor obținute experimental și a căror fotografie o reproducem în fig. 6, a fost trasată curba tensiunilor de contur în cazul prezenței simultane a două galerii: una de formă circulară în partea inferioară și alta de formă trapezoidală în partea superioară. Influența reciprocă a celor două galerii, asupra repartiției tensiunilor pe contururile lor, se face observată doar pe o anumită porțiune a frontie-

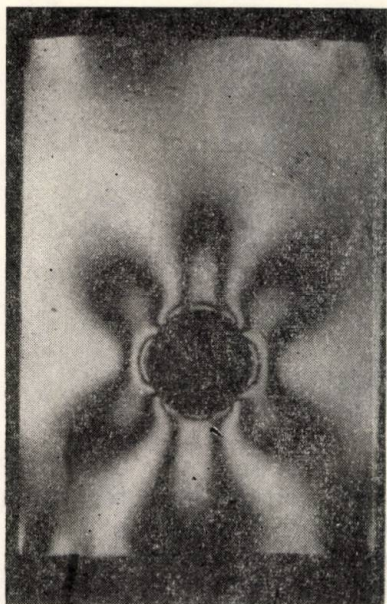


Fig. 5

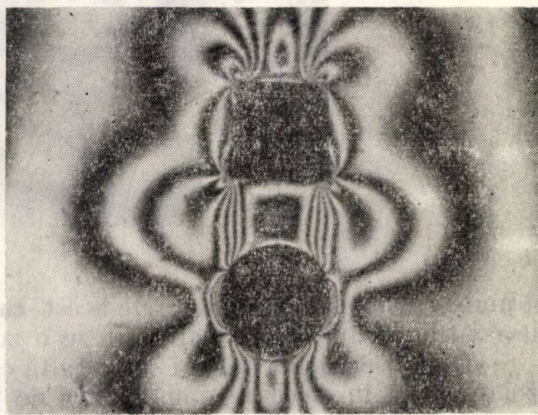


Fig. 6

relor vecine ale lor, respectiv partea inferioară a profilului trapezoidal și partea superioară a profilului circular. În rest se menține aceeași

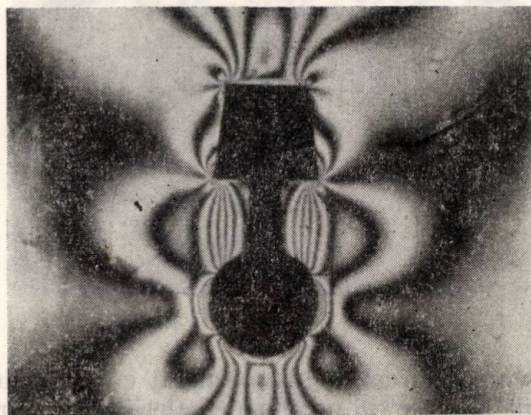


Fig. 7

stare de concentrare de tensiuni, ca și când cele două galerii s-ar afla fiecare singură sub aceeași stare de tensiuni exterioare.

De asemenea, practicarea unui canal vertical de legătură între cele două galerii (fig. 3 și 7) nu aduce modificări importante, mai ales în pereții galeriilor, în tavanul profilului trapezoidal și în vatra profilului circular,

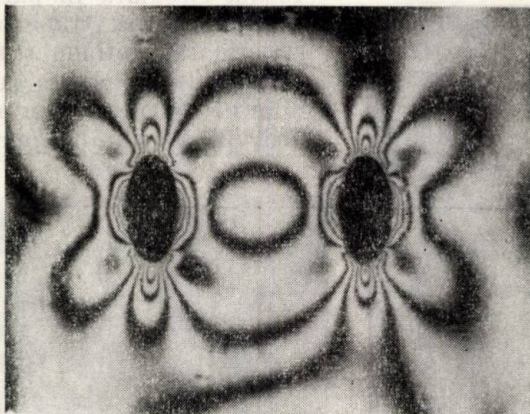


Fig. 8

ci numai în imeiata apropiere de acest canal de legătură, unde tensiunile de contur se anulează, realizându-se o zonă neutră de tensiuni.

Din observațiile de mai sus rezultă că atât în cazul profilului circular izolat, cât și în celelalte două cazuri de profile — circular și trapezoidal

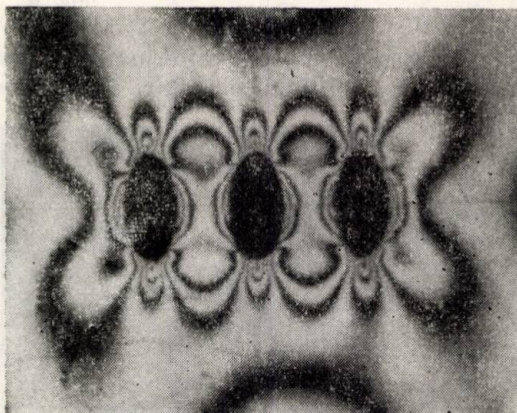


Fig. 8 a

de forme simple, cum și circular și trapezoidal cu canal de legătură între ele —, în porțiunile laterale (în pereți) ale galeriilor, în apropiere de contur există concentrări mari de tensiuni de compresiune, care pot duce la surparea peretelui lateral. Faptul constatat în practica minieră că acest perete se surpă doar după practicarea galeriei de formă trapezoidală, ar putea fi explicat prin apariția unei stări de tensiuni dinamice, datorită lucrului

în acea parte superioară, foarte apropiată (cea 2,5 m distanță) de profilul circular.

S-a realizat și studiul problemei în cazul practicării a două galerii de formă eliptică cu axele mari așezate în poziție verticală (fig. 4 și 8),

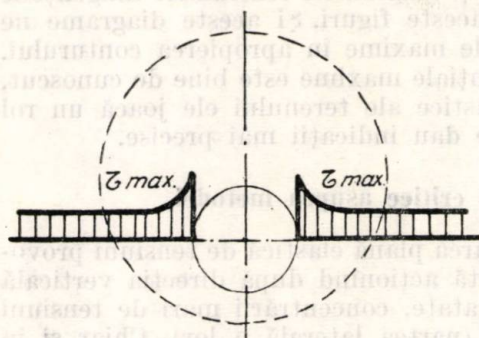


Fig. 9

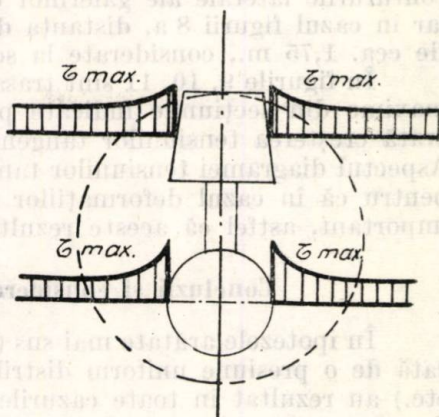


Fig. 10

situate la un același nivel pe orizontală și având raportul dintre diametrul mare și cel mic al elipsei de 2 : 1. Se știe că în cazul elipsei [4], numai dacă raportul dintre diametrul mare (vertical) și cel mic (orizontal) este de 2 : 1, se obține o distribuție mai convenabilă de tensiuni în jurul con-

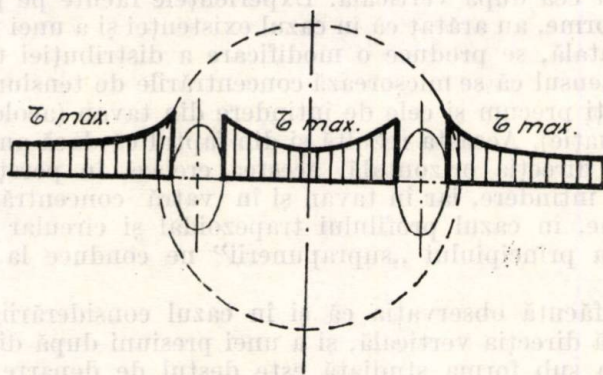


Fig. 11

rului, dispărînd complet tensiunile de întindere din tavan și vatră și avînd numai tensiuni de compresiune pe tot conturul. Acest fapt însă nu arată a avea o influență mare asupra concentrărilor de tensiuni de compresiune din pereți, care continuă să rămînă aproximativ la fel de mari.

Pentru a vedea care este influența micșorării distanței dintre cele două galerii de formă eliptică, am mai practicat o galerie (fig. 8 a) între

cele două, micșorînd astfel distanța dintre ele. Acest lucru nu duce la o modificare sensibilă a stării de tensiune de pe conturul galeriilor, după cum se constată din fotografiile izocromatelor din fig. 8 a. Pentru a da o imagine mai exactă a situației reale, trebuie să spunem că distanța dintre conturile laterale ale galeriilor din cazul figurii 8 este de cca. 4,5 m., iar în cazul figurii 8 a, distanța dintre pereții a două galerii vecine este de cca. 1,75 m., considerate la scara reală.

În figurile 9, 10, 11 sînt trasate și diagramele tensiunilor tangențiale maxime din secțiunile indicate pe aceste figuri. Și aceste diagrame ne arată creșterea tensiunilor tangențiale maxime în apropierea conturului. Aspectul diagramei tensiunilor tangențiale maxime este bine de cunoscut, pentru că în cazul deformațiilor plastice ale terenului ele joacă un rol important, astfel că aceste rezultate dau indicații mai precise.

Concluzii și considerații critice asupra metodei

În ipotezele arătate mai sus (starea plană elastică de tensiuni provocată de o presiune uniform distribuită acționînd după direcția verticală etc.) au rezultat în toate cazurile tratate, concentrări mari de tensiuni de compresiune în pereții galeriilor (partea laterală a lor). Chiar și în cazul profilelor de formă eliptică, cu raportul dintre diametrul mare (vertical) și cel mic (orizontal) de 2 : 1. Avantajul formei eliptice considerate este că în tavan și vatră nu mai apar tensiuni de contur de întindere, ca în cazul profilelor de formă trapezoidală și circulară.

Se știe însă că în realitate în teren nu există numai o presiune după direcția verticală ci și o presiune după direcția orizontală, bine înțeles, mai mică decît cea după verticală. Experiențele făcute pe profile izolate și de diferite forme, au arătat că în cazul existenței și a unei presiuni după direcția orizontală, se produce o modificare a distribuției tensiunilor de pe contur, în sensul că se micșorează concentrările de tensiuni de compresiune din pereți precum și cele de întindere din tavan (acolo unde există o astfel de situație). Aceasta rezultă și din faptul că dacă am avea numai presiuni după direcția orizontală, acestea creiază în pereți concentrări de tensiuni de întindere, iar în tavan și în vatră concentrări de tensiuni de compresiune, în cazul profilului trapezoidal și circular din cazul de față. Aplicarea principiului „suprapunerii” ne conduce la concluzia de mai sus.

Trebuie făcută observația că și în cazul considerării, în afară de presiunea după direcția verticală, și a unei presiuni după direcția orizontală, problema sub forma studiată este destul de departe de realitate. O apropiere mai bună de realitate ar fi efectuarea unui studiu pe modele construite pe bază de gelatină-glicerină, un material cu o sensibilitate optică mai mare, care face să apară tabloul de izocromate chiar sub greutatea proprie a modelului, fără aplicarea unei presiuni din afară, astfel încît se realizează condițiile presiunii litostatice din cazul presiunii solului.

Deci următorul pas în rezolvarea problemei de față ar fi realizarea unui studiu pe modele de gelatină-glicerină. Rezolvarea problemei în acest mod introduce dificultăți în modul de realizare a condițiilor optime

ale experienței și necesită o pregătire prealabilă mai serioasă, dar ea se va face într-un viitor apropiat. Desigur că ideal ar fi dacă s-ar putea realiza un material pentru modele, care, în afară de proprietatea pe care o are materialul pe bază de gelatină-glicerină de a realiza o presiune similară cu presiunea litostatică a solului, ar avea și proprietățile mecanice ale rocilor (pământurilor).

Aceasta este o problemă a viitorului pentru care chimia va avea de spus un cuvânt important.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Milbauer și M. Perla: Fotoelasticimetrie o priklady jejiho pouziti, Praha, 1961.
2. M.M. Frocht: Fotouprugosti, vol. I, II, Moscova-Leningrad, 1948 și 1950, Tehtoretizdat.
3. N. Iosipescu: Introducere în fotoelasticitate, vol. I și II, Ed. Tehnică, București, 1958 și 1960.
4. M. Stamatiu: Mecanica rocilor, Ed. D.P., București, 1962.
6. x x x: Voprosi teorii gornovo davlenia, Gosgortehizdat, Moscva, 1961.
6. T. H. Huidu: Studiul fotoelastic preliminar al distribuției tensiunilor din jurul unei galerii de formă trapezoidală, Studiu predat la ICEMIN, București, iunie 1962.

ФОТОУПРУГОЕ ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ВОКРУГ НЕКОТОРЫХ ПОДЗЕМНЫХ ВЫРАБОТОК

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настоящая работа содержит изучение напряжённого состояния вокруг некоторых шахтёрских работ методом фотоупругости. Рассмотрены случаи двух галерей довольно близких одна к другой (трапезоидальной и круговой форм, расположенных вертикально и случаи эллипсоидных галерей расположенных горизонтально).

Задача возникла при шахтёрских работах. Автор, на основе экспериментальных данных даёт некоторые выводы, полезные и применимые в шахтёрской практике.

L'ÉTUDE PHOTOÉLASTIQUE DES CONTRAINTES AUTOUR DES CONSTRUCTIONS SOUTERRAINES

RÉSUMÉ

La présente note s'occupe de l'étude de quelques constructions minières par la méthode photoélastique. On considère le cas de deux galeries relativement rapprochées, l'une de forme trapézoïdale, et l'autre de forme circulaire, disposées verticalement, et le cas des galeries de forme ellipsoïdales, disposées horizontalement.

Ce problème est souvent rencontré dans la pratique minière. Basé sur les recherches expérimentales l'auteur conclut que les résultats sont utiles pour la technique minière.

ALGEBRE DIEDRICE GENERALE

DEMAYO-TURTOI ADRIANA

În lucrarea sa de doctorat A. Popovici [2] folosește algebra diedrică D_6 a cărei structură o studiază în amănunțime. Scopul lucrării de față este de a generaliza rezultatele pentru algebre diedrice D_{2n} cu n par sau impar.

Definiție :

Numim algebra diedrică D_{2n} produsul a două algebre ciclice C_n și C_2 de unități respectiv l_i ($i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1$) și (l_1, l_2)

D_{2n} are deci unitățile l_i și $l_{i+1} = l_i l_2$ verificînd relațiile. :

$$l_i^n = l_1 \quad (i=1, 3, \dots, 2n-1); \quad l_p^2 = l_1 \quad (p=2, 4, \dots, 2n); \quad l_p l_i = l_i^{-1} l_p \quad (1)$$

unde l_1 este unitatea principală.

§ 1. Algebra D_{10}

Conform definiției date D_{10} are unitățile $l_1, l_3, l_5, l_7, l_9, l_2, l_4, l_6, l_8, l_{10}$ ce satisfac condițiile (1). Se duce cu ușurință tabla de înmulțire a unităților algebrei D_{10} .

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}
l_1	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}
l_2	l_2	l_1	l_{10}	l_9	l_8	l_7	l_6	l_5	l_4	l_3
l_3	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_1	l_2
l_4	l_4	l_3	l_2	l_1	l_{10}	l_9	l_8	l_7	l_6	l_5
l_5	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_1	l_2	l_3	l_4
l_6	l_6	l_5	l_4	l_3	l_2	l_1	l_{10}	l_9	l_8	l_7
l_7	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
l_8	l_8	l_7	l_6	l_5	l_4	l_3	l_2	l_1	l_{10}	l_9
l_9	l_9	l_{10}	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
l_{10}	l_{10}	l_9	l_8	l_7	l_6	l_5	l_4	l_3	l_2	l_1

Se observă că D_{10} are ca subgrupuri $(l_1, l_2); (l_1, l_4); (l_1, l_6); (l_1, l_8); (l_1, l_{10})$ și $(l_1, l_3, l_5, l_7, l_9)$, ultimul fiind subgrup invariant.

Ne punem problema de a descompune algebra D_{10} în subalgebre ireducibile.

Introducem unitățile :

$$m_1 = \frac{1}{5} (l_1 + l_3 + l_5 + l_7 + l_9)$$

$$m_3 = \frac{1}{5} (l_1 + \varepsilon l_3 + \varepsilon^2 l_5 + \varepsilon^3 l_7 + \varepsilon^4 l_9)$$

$$m_5 = \frac{1}{5} (l_1 + \varepsilon^2 l_3 + \varepsilon^4 l_5 + \varepsilon l_7 + \varepsilon^3 l_9)$$

$$m_7 = \frac{1}{5} (l_1 + \varepsilon^3 l_3 + \varepsilon l_5 + \varepsilon^4 l_7 + \varepsilon^2 l_9)$$

$$m_9 = \frac{1}{5} (l_1 + \varepsilon^4 l_3 + \varepsilon^3 l_5 + \varepsilon^2 l_7 + \varepsilon l_9)$$

$$m_2 = \frac{1}{5} (l_2 + l_4 + l_6 + l_8 + l_{10})$$

$$m_4 = \frac{1}{5} (l_2 + \varepsilon l_4 + \varepsilon^2 l_6 + \varepsilon^3 l_8 + \varepsilon^4 l_{10})$$

$$m_6 = \frac{1}{5} (l_2 + \varepsilon^2 l_4 + \varepsilon^4 l_6 + \varepsilon l_8 + \varepsilon^3 l_{10})$$

$$m_8 = \frac{1}{5} (l_2 + \varepsilon^3 l_4 + \varepsilon l_6 + \varepsilon^4 l_8 + \varepsilon^2 l_{10})$$

$$m_{10} = \frac{1}{5} (l_2 + \varepsilon^4 l_4 + \varepsilon^3 l_6 + \varepsilon^2 l_8 + \varepsilon l_{10})$$

unde $1, \varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^5, \varepsilon^4$ sînt rădăcinile ecuației binome $x^5 - 1 = 0$.

Se observă că $m_p = m_i l_2$ ($p = 2, 4, 6, 8, 10$ resp. $i = 1, 3, 5, 7, 9$)
 Tabla de înmulțire a unităților m_k se deduce cu ușurință avînd în vedere
 c $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$, fiind rădăcini ale ecuației : $x^5 - 1 = 0$
 satisfac condițiile lui Viète.

Se obține următoarea tablă de înmulțire a unităților m_k :

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
m_1	m_1	m_2	0	0	0	0	0	0	0	0
m_2	m_2	m_1	0	0	0	0	0	0	0	0
m_3	0	0	m_3	m_4	0	0	0	0	0	0
m_4	0	0	0	0	0	0	0	m_4	m_3	0
m_5	0	0	0	0	m_5	m_6	0	0	0	0
m_6	0	0	0	0	0	0	m_6	m_5	0	0
m_7	0	0	0	0	0	0	m_7	m_8	0	0
m_8	0	0	0	0	m_8	m_7	0	0	0	0
m_9	0	0	0	0	0	0	0	0	m_9	m_{10}
m_{10}	0	0	m_{10}	m_9	0	0	0	0	0	0

Cu ajutorul unităților m_k introducem unitățile:

$$\varepsilon_1 = m_3 + m_9; \quad \varepsilon_2 = m_4 + m_{10}; \quad \varepsilon_3 = m_3 - m_9; \quad \varepsilon_4 = m_4 - m_{10} \quad (3)$$

$$\eta_1 = m_5 + m_7; \quad \eta_2 = m_6 + m_8; \quad \eta_3 = m_5 - m_7; \quad \eta_4 = m_6 - m_8$$

precum și

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2); \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)$$

Se obține următoarele table de înmulțire pentru unitățile: ε_r, η_r ($r = 1, 2, 3, 4$)

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_2	ε_2	ε_1	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_3$
ε_3	ε_3	ε_4	ε_1	ε_2
ε_4	ε_4	ε_3	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_1$

	η_1	η_2	η_3	η_4
η_1	η_1	η_2	η_3	η_4
η_2	η_2	η_1	$-\eta_4$	$-\eta_3$
η_3	η_3	η_4	η_1	η_2
η_4	η_4	η_3	$-\eta_2$	$-\eta_1$

ceea ce dovedește că ele formează respectiv două subalgebre quaternionice*.

Teoremă. Algebra D_{10} se reduce la două algebre quaternionice, de unități respectiv $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ și $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ și la două algebre de câte o unitate.

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \quad \text{respectiv} \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)$$

* De obicei se definește algebra quaternionilor ca fiind o algebră de unități 1, i, j, k cu următoarea tablă de înmulțire:

$$i \cdot 1 = 1i = i, j \cdot 1 = 1j = j, k \cdot 1 = 1k = k, ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1$$

Făcînd schimbarea $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow i\varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow i\varepsilon_3, \varepsilon_4 \rightarrow i\varepsilon_4$ se observă că unitățile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ satisfac aceleași reguli de înmulțire ca și unitățile 1, i, j, k ale unei algebre quaternionice

Demonstrație. Conform criteriului lui Scheffers, dacă o algebră este redusă la subalgebre ireductibile, trebuie ca suma unităților principale din fiecare subalgebră să fie unitatea principală a algebrei iar produsul elementelor a două subalgebre distincte să fie nul.

În cazul de față se observă că unitățile principale ale algebrelor quaternionice sînt ε_1, η_1 și că :

$$\varepsilon_1 + \eta_1 + \varphi_1 + \varphi_2 = m_3 + m_5 + m_7 + m_9 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) + \frac{1}{2}(m_1 - m_2) = \sum_{i=1,3,5,7,9} m_i$$

Din formulele (2) se scoate cu ușurință că $l_1 = \sum m_i$ deci în adevăr

$$\varepsilon_1 + \eta_1 + \varphi_1 + \varphi_2 = l_1$$

Se verifică imediat folosind tabla de înmulțire a elementelor m_i că produsele de elemente din subalgebre diferite sînt nule.

În algebra D_{10} se poate introduce o normă. Se observă că $\varepsilon \varepsilon^4 = \varepsilon^2 \varepsilon^3 = 1$, deci $\varepsilon, \varepsilon^4$ ca și $\varepsilon^2, \varepsilon^3$ sînt conjugate între ele.

Din relațiile (2) urmează imediat formulele inverse :

$$\begin{aligned} l_1 &= m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9 \\ l_3 &= m_1 + \varepsilon^4 m_3 + \varepsilon^3 m_5 + \varepsilon^2 m_7 + \varepsilon m_9 \\ l_5 &= m_1 + \varepsilon^3 m_3 + \varepsilon m_5 + \varepsilon^4 m_7 + \varepsilon^2 m_9 \\ l_7 &= m_1 + \varepsilon^2 m_3 + \varepsilon^4 m_5 + \varepsilon m_7 + \varepsilon^3 m_9 \\ l_9 &= m_1 + \varepsilon m_3 + \varepsilon^2 m_5 + \varepsilon m_7 + \varepsilon^4 m_9 \end{aligned} \quad (2')$$

l_3 și l_9 se obțin una din alta înlocuind ε^4 cu ε și invers, iar l_5 , și l_7 înlocuind ε^3 și ε^2 și invers. Urmează :

$$l_3^+ = l_9; \quad l_5^+ = l_7, \quad l_9^+ = l_3, \quad l_7^+ = l_5$$

(unde semnul $+$ semnifică conjugatul unității respective)

avem $l_1^2 = l_1$ deci $l_1^+ = l_1$

De asemenea $l_p^2 = l_1$ deci $l_p^+ = -l_p$ or $p = 2, 4, 6, 8, 10$

Dacă presupunem că conjugatul unei sume este suma conjugatelor, urmează din relațiile (2)

$$\begin{aligned} m_p^+ &= -m_p \quad (p = 2, 4, 6, 8, 10), \quad m_1^+ = m_1, \quad m_3^+ = m_9, \\ m_5^+ &= m_7, \quad m_7^+ = m_5, \quad m_9^+ = m_3 \end{aligned}$$

Avînd în vedere relațiile (3), rezultă :

$$\varepsilon_1^+ = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^+ = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3^+ = -\varepsilon_3, \quad \varepsilon_4^+ = -\varepsilon_4$$

deci în cele două algebre quaternionice urmează conjugarea cunoscută.

Norma unui număr v se definește ca de obicei :

$$N(v) = v \cdot v^+$$

unde v^+ e conjugatul lui v .

§ 2. Algebra D_8

Algebra D_8 are unitățile $l_1, l_3, l_5, l_7, l_2, l_4, l_6, l_8$ ce satisfac condițiile(1).
Se deduce următoarea tablă de înmulțire a unităților algebrei D_8 .

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
l_1	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8
l_2	l_2	l_1	l_8	l_7	l_6	l_5	l_4	l_3
l_3	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_1	l_2
l_4	l_4	l_3	l_2	l_1	l_8	l_7	l_6	l_5
l_5	l_5	l_6	l_7	l_8	l_1	l_2	l_3	l_4
l_6	l_6	l_5	l_4	l_3	l_2	l_1	l_8	l_7
l_7	l_7	l_8	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6
l_8	l_8	l_7	l_6	l_5	l_4	l_3	l_2	l_1

Se observă că D_8 are ca subgrupuri pe (l_1, l_2) ; (l_1, l_4) ; (l_1, l_6) ; (l_1, l_8) (l_1, l_3, l_5, l_7) , ultimul fiind subgrup invariant.

Ca și în algebra D_{10} , ne punem problema de a descompune algebra D_8 în subalgebre ireductibile.

Introducem unitățile :

$$\begin{aligned}
 m_1 &= \frac{1}{4} (l_1 + l_3 + l_5 + l_7) & m_2 &= \frac{1}{4} (l_2 + l_4 + l_6 + l_8) \\
 m_3 &= \frac{1}{4} (l_1 + il_3 - l_5 - il_7) & m_4 &= \frac{1}{4} (l_2 + il_4 - l_6 - il_8) \\
 m_5 &= \frac{1}{4} (l_1 - l_3 + l_5 - l_7) & m_6 &= \frac{1}{4} (l_2 - l_4 + l_6 - l_8) \\
 m_7 &= \frac{1}{4} (l_1 - il_3 - l_5 + il_7) & m_8 &= \frac{1}{4} (l_2 - il_4 - l_6 + il_8)
 \end{aligned} \tag{4}$$

unde $\varepsilon = i$, $\varepsilon^2 = -1$, $\varepsilon^3 = -i$, $\varepsilon^4 = 1$ ($i = \sqrt{-1}$) sînt rădăcinile ecuației binome

$$x^4 - 1 = 0$$

Se observă că $m_p = m_i l_2$ ($p = 2, 4, 6, 8$; $i = 1, 3, 5, 7$)

Se deduce cu ușurință următoarea tablă de înmulțire a unităților m_r :

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
m_1	m_1	m_2	0	0	0	0	0	0
m_2	m_2	m_1	0	0	0	0	0	0
m_3	0	0	m_3	m_4	0	0	0	0
m_4	0	0	0	0	0	0	m_4	m_3
m_5	0	0	0	0	m_5	m_6	0	0
m_6	0	0	0	0	m_6	m_5	0	0
m_7	0	0	0	0	0	0	m_7	m_8
m_8	0	0	m_8	m_7	0	0	0	0

Introducem acum unitățile

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(m_5 + m_6) \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(m_5 - m_6)$$

$$\varepsilon_1 = m_3 + m_7 \quad \varepsilon_3 = m_3 - m_7$$

$$\varepsilon_2 = m_4 + m_8 \quad \varepsilon_4 = m_4 - m_8$$

Unitățile ε_r formează o algebră quaternionică, după cum se arată ușor scriind tabla lor de înmulțire.

	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_1	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4
ε_2	ε_2	ε_1	$-\varepsilon_4$	$-\varepsilon_3$
ε_3	ε_3	ε_4	ε_1	ε_2
ε_4	ε_4	ε_3	$-\varepsilon_2$	$-\varepsilon_1$

Teoremă. Algebra D_8 se reduce la o algebră quaternionică de unități ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$) și la 4 algebre de câte o unitate respectiv:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2), \quad \psi_1 = \frac{1}{2}(m_5 + m_6),$$

$$\psi_2 = \frac{1}{2}(m_5 - m_6)$$

Demonstrația se face tot cu ajutorul criteriului lui Scheffers.

Ca și în algebra D_8 putem introduce o normă. Conjugatele unităților l_i și l_p sînt:

$$l_p^+ = -l_p \text{ (or } p = 2, 4, 6, 8), \quad l_1^+ = l_1, \quad l_3^+ = l_7, \quad l_5^+ = l_5, \quad l_7^+ = l_3$$

Urmează:

$$m_p^+ = -m_p \text{ (or } p = 2, 4, 6, 8), \quad m_1^+ = m_1, \quad m_3^+ = m_7, \quad m_5^+ = m_5, \quad m_7^+ = m_3$$

Definim și $m_p = m_i l_2$ ($p = 2, 4, 6, \dots, 4n + 2$ respectiv $i = 1, 3, 5, \dots, 4n + 1$)

Cu ajutorul acestor unități definim unitățile :

$$\varepsilon_1^{(i)} = m_i + m_{4n+4-i}; \quad \varepsilon_3^{(i)} = m_i - m_{4n+4-i} \quad (i = 3, 5, 7, \dots, 2n + 1)$$

$$\text{și } \varepsilon_2^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)} l_2; \quad \varepsilon_4^{(i)} = \varepsilon_3^{(i)} l_2$$

Obținem astfel n algebre quaternionice, fiecare de unitate principală $\varepsilon_1^{(i)}$.

$$\text{Definim și } \varphi_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2); \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (m_1 - m_2)$$

Teoremă. Algebra $D_{2(2n+1)}$ se reduce la n algebre quaternionice de unități $(\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \varepsilon_3^{(i)}, \varepsilon_4^{(i)})$ ($i = 3, 5, 7, \dots, 2n + 1$)

și la două algebre de câte o unitate respectiv $\varphi_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)$, $\varphi_2 = \frac{1}{2} (m_1 - m_2)$.

Demonstrația se face folosind criteriul lui Scheffers.

Se observă că pentru $n = 2$ obținem rezultatul cunoscut pentru algebra D_{10} .

În algebra $D_{2(2n+1)}$ putem introduce o normă. Folosind aceeași metodă ca și la algebrele studiate anterior, avem :

$$l_p^+ = -l_p, \quad l_1^+ = l_1, \quad l_i^+ = l_{4n+4-i} \quad \text{iar}$$

$$m_p^+ = -m_p, \quad m_1^+ = m_1, \quad m_i^+ = m_{4n+4-i}$$

Rezultă în algebrele quaternionice conjugarea quaternionică :

$$\varepsilon_1^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)}, \quad \varepsilon_3^{(i)} = -\varepsilon_3^{(i)}, \quad \varepsilon_2^{(i)} = -\varepsilon_2^{(i)}, \quad \varepsilon_4^{(i)} = -\varepsilon_4^{(i)}$$

Ca de obicei norma unui element din $D_{2(2n+1)}$ se definește astfel : $N(v) = v \cdot v^+$

§ 4. Algebra $D_{2(2n)}$

Unitățile algebrei $D_{2(2n)}$ sînt : $l_1, l_3, l_5, \dots, l_{2(2n)-1}$ și $l_2, l_4, l_6, \dots, l_{2(2n)}$
Fie $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{2^n-1}$ rădăcinile ecuației binome :

$$x^{2^n} - 1 = 0$$

Notăm cu B matricea :

$$B = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{2^n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2^{n-2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon^{2^n-1} & \varepsilon^{2^{n-2}} & \dots & \varepsilon \end{pmatrix}$$

și cu l vectorul linie :

$$l = (l_1, l_3, l_5, \dots, l_{2(2n)-1})$$

Fie $m = l B$ vectorul linie obținut prin înmulțirea vectorului linie l cu matricea B .

$$m = (m_1, m_3, m_5, \dots, m_{2(2n)-1})$$

Urmează deci :

$$m_1 = \frac{1}{2n} (l_1 + l_3 + l_5 + \dots + l_{2(2n)-1})$$

$$m_3 = \frac{1}{2n} (l_1 + \varepsilon l_3 + \varepsilon^2 l_5 + \dots + \varepsilon^{2n-1} l_{2(2n)-1})$$

$$\dots \dots \dots$$

$$m_{2(2n)-1} = \frac{1}{2n} (l_1 + \varepsilon^{2n-1} l_3 + \varepsilon^{2n-2} l_5 + \dots + \varepsilon l_{2(2n)-1})$$

Definim și $m_p = m_i l_2$

Introducem acum unitățile :

$$\varepsilon_1^{(i)} = m_i + m_{4n+2-i}, \quad \varepsilon_4^{(i)} = m_i - m_{4n+2-i}$$

și

$$\varepsilon_2^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)} l_2 \quad ; \quad \varepsilon_3^{(i)} = \varepsilon_4^{(i)} l_2$$

unde $i = 3, 5, 7, \dots, 2n-1$

Se verifică că aceste unități formează $n-1$ algebre quaternionice respectiv de unități $(\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \varepsilon_3^{(i)}, \varepsilon_4^{(i)})$ ($i = 3, 5, 7, \dots, 2n-1$)

Fie

$$\psi_1 = \frac{1}{2} (m_{2n+1} + m_{2n+2}); \quad \psi_2 = \frac{1}{2} (m_{2n+1} - m_{2n+2})$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \quad ; \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} (m_1 - m_2)$$

Teoremă. Algebra $D_{2(2n)}$ se reduce la $n-1$ algebre quaternionice și 4 algebre de câte o unitate.

Demonstrația folosește de asemenea criteriul lui Scheffers.

Se observă că pentru $n=2$ regăsim reducerea algebrei D_8 .

Conjugatul unei unități din $D_{2(2n)}$ se găsește ca și înainte :

$$l_p^+ = -l_p, \quad l_1^+ = l_1, \quad l_i^+ = l_{4n+2-i}$$

$$m_p^+ = -m_p, \quad m_1^+ = m_1, \quad m_i^+ = m_{4n+2-i}$$

În algebrele quaternionice rezultă conjugarea quaternionică :

$$\varepsilon_1^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)}, \quad \varepsilon_2^{(i)} = -\varepsilon_2^{(i)}, \quad \varepsilon_3^{(i)} = -\varepsilon_3^{(i)}, \quad \varepsilon_4^{(i)} = \sigma_4^{(i)}$$

§ 5. Reprezentarea izomorfă prin matricei a algebrei quaternionilor

Matricile :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; & \mu_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mu_2 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}; & \mu_4 &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

au aceleași reguli de înmulțire ca și unitățile algebrei quaternionice. Ele formează deci o reprezentare izomorfă a algebrei quaternionilor prin matrice de ordinul 3.

§ 6. Reprezenta izomorfă prin matricei a algebrei D_{10}

Fie matricile de ordinul 8 celular diagonale :

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}; & M_2 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & & & & & \\ -1 & -1 & 2 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\ M_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & & & & & \\ 1 & -1 & 0 & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}; & M_4 &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 1 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \\ M_5 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 2 & -1 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ 0 & & & -1 & -1 & 2 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}; & M_6 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 2 & -1 & -1 & & \\ & & & -1 & -1 & 2 & & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$M_7 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_8 = -\frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & -1 & 1 & & \\ & 1 & 0 & -1 & & \\ 0 & -1 & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_9 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_{10} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ 0 & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Observăm că tabla de înmulțire a acestor matrici este aceeași cu tabla de înmulțire a unităților ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \varphi_1, \varphi_2$) deci aceste matrici de ordinul 8 constituie o reprezentare izomorfă a algebrei D_{10} .

§ 7. Reprezentarea izomorfă prin matrici a algebrei D_8

Fie matricile de ordinul 7 celular diagonale:

$$M_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_3 = \begin{pmatrix} \mu_3 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_4 = \begin{pmatrix} \mu_4 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix};$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_7 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}; \quad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ele constituie o reprezentare izomorfă prin matrici de ordinul 7 a algebrei D_8 .

§ 8. Reprezentarea izomorfă prin matrici a algebrei $D_{2(2n+1)}$

Fie matricile de ordinul $3n + 2$ celular diagonale:

$$M_1^{(j)}, M_2^{(j)}, M_3^{(j)}, M_4^{(j)}, j = 1, 2, \dots, n$$

care se obțin pentru un j fix scriind în linia j în linia $j + 1$ și în linia $j + 2$ respectiv $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, iar în rest 0.

Fie și matricile

$$\begin{aligned} M_{4n+1} &= \delta_{j,3n+1} \\ M_{4n+2} &= \delta_{j,3n+2} \end{aligned} \quad \text{unde } \delta_{ji} \text{ este simbolul lui Kronecher}$$

Ele constituie o reprezentare izomorfă a algebrei $D_{2(2n+1)}$ prin matrici de ordinul $3n+2$. Pentru $n=2$ obținem reprezentarea algebrei D_{10} .

§ 9. Reprezentarea izomorfă prin matrici a algebrei $D_{2(2n)}$

Fie matricile de ordinul $3n+1$ celular diagonale :

$$M_1^{(j)}, M_2^{(j)}, M_3^{(j)}, M_4^{(j)}, (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

care se obțin pentru un j fix scriind pe linia $j, j+1$ și $j+2$ respectiv $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ iar în rest 0.

Fie și matricile

$$\begin{aligned} M_{4n-3} &= \delta_{j,3n-2} \\ M_{4n-2} &= \delta_{j,3n-1} \\ M_{4n-1} &= \delta_{j,3n} \\ M_{4n} &= \delta_{j,3n-1} \end{aligned} \quad (\delta_{ji} - \text{simbolul Kronecher})$$

Ele constituie o reprezentare izomorfă a algebrei $D_{2(2n)}$. Pentru $n=2$ se obține ca un caz particular reprezentarea algebrei D_8 .

§ 10. Concluzii generale

Analizând rezultatele paragrafelor 3 și 4 ajungem la concluzia că produsul direct a n algebre quaternionice cu 2 algebre de câte o unitate, ca și produsul direct a $n-1$ algebre quaternionice cu 4 algebre de câte o unitate au ca rezultat algebre diedrice generale.

După cum se știe [1], se poate asocia oricărei algebre ipercomplexe de unități $f_1, f_2, \dots, f_n$ cu tabla de înmulțire :

$$f_j f_k = \Gamma_{jk}^i f_i$$

un spațiu An cu conexiunea constantă Γ_{jk}^i

Dacă algebra este comutativă; urmează : $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ deci torsiunea este nulă.

În cazul algebrilor $D_{2(2n+1)}$ și $D_{2(2n)}$ spațiul cu conexiune constantă asociat are torsiune.

BIBLIOGRAFIE

1. Vrănceanu Gheorghe: „Lecții de geometrie diferențială” (vol. II).
2. Popovici Andrei: „La physique d'action”
3. B.L. Van der Waerden: „Moderne algebra” (partea II).
4. Study, Cartan Elie: „Nombres a multiplication associative” (Encyc. Sc. Math. 15, 1908).

ОБЩИЕ ДИЭДРИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

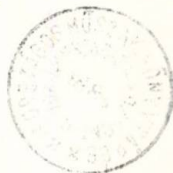
В настоящей работе обобщаются результаты полученные А. Поповичем [2], для диэдровых алгебр D_8 , рассматривая вначале диэдровые алгебры D_8 и D_{10} , после этого $D_{2(2n)}$, соответственно $D_{2(2n+1)}$.

Вначале сводятся эти диэдровые алгебры к несводимым алгебрам и делается изоморфное отображение к матрицам. Показывается, также, как вводится ассоциированное пространство с постоянной связностью [1].

ALGEBRE DIEDRICE GENERALE

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit werden Resultate von A. Popovici [1] für die Diederalegebren D_8 verallgemeinert, indem die Diederalegebren D_8 und D_{10} und dann $D_{2(2n)}$ bzw. $D_{2(2n+1)}$ betrachtet werden. Es wird eine Reduktion dieser Diederalegebren in nichtreduktible Algebren und eine isomorphe Darstellung durch Matrizen durchgeführt. Auch wird gezeigt wie der zugeordnete Raum mit konstanter Verbindung eingeführt wird [1].

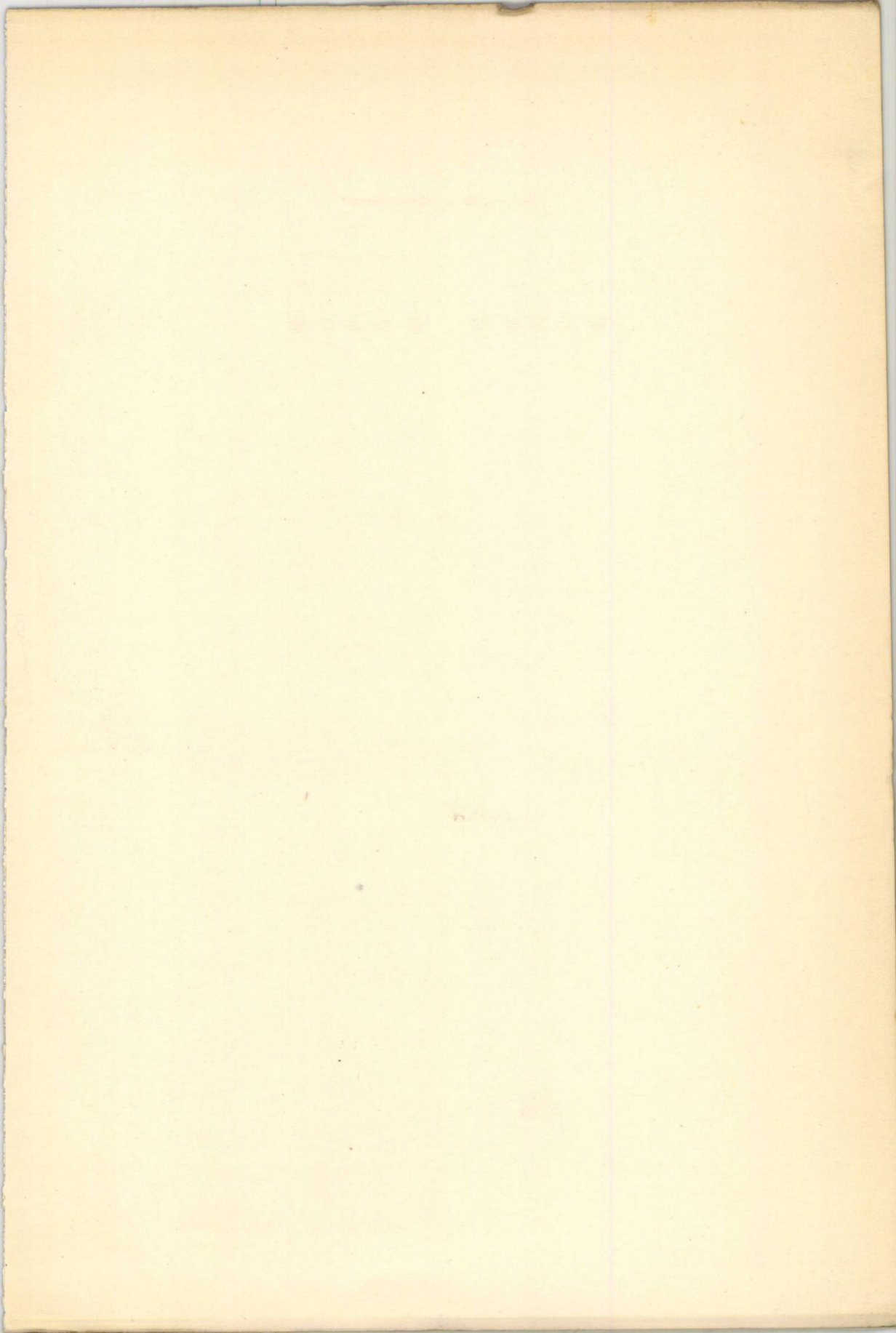


Redactor : ȘTEFANIA BARBU
Tehnoredactare : MIHAIL GEORGESCU

Analele Universității București
seria ȘTIINȚELE NATURII
MATEMATICĂ-MECANICĂ
Anul XIII — nr. 2 — 1964



UNIVERSITY OF MICHIGAN LIBRARY
ANN ARBOR, MICHIGAN 48106-1500
SERIALS ACQUISITION
300 NORTH ZEEB ROAD
ANN ARBOR, MI 48106-1500
U.S.A.
Tel: (313) 763-7000
Fax: (313) 763-7000
E-mail: serials@umich.edu
Web: http://www.lib.umich.edu/serials/



1966 OKT 12